Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Aaron Kunert / Sven Wagner

Wintersemester 2009/2010
Lösungsblatt 3
18.11.2009

# Lineare Algebra I

**Lösung 3.1:**

(a) Sei $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ wie in der Aufgabe gegeben.

(i) Die Gruppe $G$ ist kommutativ genau dann, wenn für alle $0 \leq i, j \leq n$ gilt, dass $a_i + a_j = a_j + a_i$. Das bedeutet, dass der Eintrag im Kreuzungspunkt der $i$-ten Zeile mit der $j$-ten Spalte und der Eintrag im Kreuzungspnkt der $j$-ten Zeile mit der $i$-ten Spalte übereinstimmen. Man erkennt also die Kommutativität der Gruppe daran, dass die Tafel symmetrisch zur (fallenden) Diagonale ist.

(ii) Addiert man das neutrale Element (von links oder von rechts) zu einem beliebigen Gruppenelement, so bleibt Letzteres unverändert. Für die Tafel bedeutet somit die Existenz eines neutralen Elements, dass es eine unveränderte Zeile und Spalte gibt (mit unverändert meine ich, eine Zeile/Spalte, die mit der Zeile/Spalte ganz oben bzw. ganz links übereinstimmt). Das heißt es gibt eine Spalte/Zeile, in der die Elemente exakt in der Reihenfolge $a_1, a_2, \dots, a_n$ auftreten. Da $a_1 = 0$, ist sind dies die erste Spalte und die erste Zeile.

(c) Ist $g \in G$ und existiert ein Inverses zu $g$, so gibt es ein Element $h$ in $G$, so dass $h + g = g + h = 0$ ist. Ein Inverses zu $a_i$ existiert also, wenn in der Zeile von $a_i$ mindestens einmal das Nullelement auftaucht. Analog taucht einmal das Nullelement in der Spalte von $a_i$ auf. Da ein inverses Element eindeutig ist, taucht das Nullelement sogar genau einmal in der Spalte bzw. Zeile von $a_i$ auf. Hat nun jedes Element ein inverses Element, so taucht die Null exakt einmal in jeder Zeile und in jeder Spalte auf.

(b) Voraussetzung: Seien $G$ eine abelsche Gruppe, $h \in G$ und $T_h$ wie in der Aufgabe.
Behauptung: $T_h$ ist bijektiv mit Umkehrabbildung $T_{-h}$.
Beweis: Wir zeigen, dass $T_h$ sowohl injektiv, als auch surjektiv ist.
Injektivität: Seien $a, b \in G$. Ist $T_h(a) = T_h(b)$ so ist $h + a = h + b$. Zieht man auf beiden Seiten $h$ ab, so erhält man $a = b$. Also besitzt kein Urbild eines $x \in G$ mehr als ein Element.
Surjektivität: Sei $a \in G$. Wir konstruieren ein Urbild von $a$ unter $T_h$. Dazu betrachten wir das Element $b := a - h$. In der Tat ist dies ein Urbild, denn es gilt $T_h(b) = h + a - h = h - h + a = 0 + a = a$.
Damit ist gezeigt, dass die Abbildung $T_h$ bijektiv für jedes $h \in G$ ist.

Als nächstes konstruieren wir die Umkehrabbildung. Dazu betrachten wir $T_{-h}$. Für $a \in g$ ist $T_{-h} \circ T_h(a) = T_{-h}(h + a) = -h + (h + a) = (-h + h) + a = 0 + a = a$. Da dies für alle Gruppenelemente gilt, folgt $T_{-h} \circ T_h = \mathrm{id}_G$. Da $T_h$ bijektiv ist, folgt mit Aufgabe 2.2 (c), dass $T_{-h}$ die Umkehrabbildung von $T_h$ ist.

Die Bijektivität von $T_h$ lässt sich im Hinblick auf die Addtionstafel wie folgt interpretieren. In der Zeile von $a_i$ stehen gerade die Elemente $T_{a_i}(a_0), \dots, T_{a_i}(a_n)$. Aufgrund der Bijektivität kommt in dieser Zeile also jedes Gruppenelement genau einmal vor. Also steht jedes Gruppenelement genau einmal in jeder Zeile.

**Lösung 3.2:**

(a) Voraussetzung: Seien $G = \{a, b\}$ und $H = \{a, b, c\}$ und folgende Additionstafeln gegeben:

(i)

| $+$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $a$ |

(ii)

| $+$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $c$ | $a$ | $b$ |
| $b$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $c$ | $b$ | $c$ | $a$ |

Behauptung: $G$ ist mit der Additionstafel (i) eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $a$, und $H$ ist mit der Additionstafel (ii) eine abelsche Gruppe mit neutralen Element $b$.

Beweis: Wir müssen überprüfen, dass $+$ jeweils eine assoziative und kommutative Operation ist. Dann bleibt zu zeigen, dass jeweils ein neutrales Element existiert, und dass es zu jedem Element in $G$ bzw. $H$ ein inverses Element gibt. Die Assoziativitatt- ist aus der Tabelle nicht unmittelbar ersichtlich und müsste für alle Kombinationen nachgerechnet werden. Um das zu vermeiden, versucht man schon vorab möglichst viele Fälle pauschal abzuhaken. Hat man die Gleichung $x + (y + z) = (x + y) + z$ nachzuprüfen, so ist nichts zu zeigen, falls eines der Elemente $x, y, z$ das neutrale Element ist. Auf diese Weise reduzieren sich die Anzahl der Fälle erheblich.

Wir betrachten zuerst die erste Tabelle. Aus der Tabelle lässt sich entnehmen, dass $a$ die Eigenschaft eines neutralen Elements hat, denn es ist $a + a = a$ und $a + b = b + a = b$. Wegen obiger Argumentation folgt die Assoziativität von $+$ sofort. Die Kommutativität kann man sofort aus der Tafel ablesen, da die Tafel symmetrisch zur Diagonalen ist. Weiter ist $b + b = a$, somit hat $b$ ein inverses Element (nämlich sich selbst). Das neutrale Element $a$ ist automatisch invertierbar, denn es ist stets $a+a = a$. Somit ist $G$ eine Gruppe.

Nun betrachtet man die zweite Tabelle. Hier hat $b$ die Eigenschaft eines neutralen Elements, denn es ist $a + b = b + a = a$, $b + b = b$ und $c + b = b + c = c$. Die Kommutativität von $+$ folgt aus der symmetrischen Gestalt der Tabelle. Für die Assoziativität betrachten wir nur Tripel bestehend aus den Elementen $a$ und $c$. Nutzt man die Kommutativität aus, so muss man folgende Kombinationen mit Hilfe der Tabelle prüfen:

$$
\begin{aligned}
a + (a + a) = a + c = b = c + a = (a + a) + a \quad \checkmark \\
a + (a + c) = a + b = a = c + c = (a + a) + c \quad \checkmark \\
a + (c + c) = a + a = c = b + c = (a + c) + c \quad \checkmark \\
c + (c + c) = c + a = b = a + c = (c + c) + c \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Von der Existenz eines Inversen kann man sich überzeugen, indem man sich vergewissert, dass in jeder Zeile das Element $b$ einmal vorkommt. Dies ist jedoch in der Tat der Fall, also ist gezeigt, dass $H$ eine Gruppe ist.

(b) Behauptung: Es gibt (bis auf Isomorphie) genau zwei abelsche Gruppen mit genau vier Elementen.

Beweis: Wir geben zuerst zwei verschiedene Additionstafeln an:

$(i)$

| $+$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $d$ | $a$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | $a$ | $b$ |
| $d$ | $d$ | $a$ | $b$ | $c$ |

$(ii)$

| $+$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $d$ | $c$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | $a$ | $b$ |
| $d$ | $d$ | $c$ | $b$ | $a$ |

Beide Additionstafeln liefern abelsche Gruppen. Dies sieht man entweder durch Überprüfen der Eigenschaften, die eine abelschen Gruppe definieren, oder folgendermaßen: (i) ist die Additionstafel von $\mathbb{Z}/\langle 4\rangle$, wenn man $a = \overline{0}$, $b = \overline{1}$, $c = \overline{2}$ und $d = \overline{3}$ setzt. Somit ist jede abelsche Gruppe mit vier Elementen $\{a, b, c, d\}$, die (i) als Additionstafel hat, isomorph zu $\mathbb{Z}/\langle 4\rangle$.
(ii) ist die Additionstafel von $(\mathbb{Z}/\langle 2\rangle) \times (\mathbb{Z}/\langle 2\rangle)$, wenn man $a = (\overline{0}, \overline{0})$, $b = (\overline{1}, \overline{0})$, $c = (\overline{0}, \overline{1})$ und $d = (\overline{1}, \overline{1})$ setzt. Außerdem ist damit jede abelsche Gruppe mit vier Elementen, die (ii) als Additionstafel hat, isomorph zu $(\mathbb{Z}/\langle 2\rangle) \times (\mathbb{Z}/\langle 2\rangle)$.

Zu zeigen bleibt, dass dies bis auf Vertauschen der Elemente $a, b, c, d$ in der Tabelle die einzigen Additionstafeln einer abelschen Gruppe mit vier Elementen sind. Sei also eine beliebige Additionstafel einer abelschen Gruppe $G = (\{a, b, c, d\}, +)$ mit vier Elementen gegeben.

Wir dürfen die Elemente vertauschen, also dürfen wir annehmen, dass $a = 0$, also $a$ das neutrale Element von $G$ ist. Dann sieht die Additionstafel in der ersten Spalte und in der ersten Spalte auf jeden Fall so aus:

| $+$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $b$ | $b$ | ? | ? | ? |
| $c$ | $c$ | ? | ? | ? |
| $d$ | $d$ | ? | ? | ? |

Nun schauen wir nach, ob in der Diagnalen nur $a$ steht (d.h. $x + x = a$ für alle $x \in \{a, b, c, d\}$) (1. Fall), oder an mindestens einer Stelle $x + x \neq a$ steht (2. Fall).

Betrachten wir den ersten Fall: Die Tafel sieht zunächst erst einmal so aus:

| $+$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | ? | ? |
| $c$ | $c$ | ? | $a$ | ? |
| $d$ | $d$ | ? | ? | $a$ |

Aus Aufgabe 3.1 (b) wissen wir, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte jedes Element genau einmal stehen muss. Somit kann in der Zeile (Spalte) $b$ kein $a$ und kein $b$ mehr vorkommen. Es kann außerdem nicht $b + c = c$ gelten, da dies $b = 0 = a$ implizieren würde, was ein Widerspruch zu $b \neq a$ darstellt. Somit sind auch schon die Zeile $b$ und die Spalte $b$ festgelegt, da die Additionstafel symmetrisch sein muss (Aufgabe 3.1 (a)).

| $+$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $d$ | $c$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | $a$ | ? |
| $d$ | $d$ | $c$ | ? | $a$ |

Nun bleibt für die Stellen $c + d$ und $d + c$ nur noch die Möglichkeit $b$.

| $+$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $d$ | $c$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | $a$ | $b$ |
| $d$ | $d$ | $c$ | $b$ | $a$ |

Diese Additionstafel entspricht genau der Tafel (ii) von oben.

Nun müssen wir noch den zweiten Fall betrachten. Es gilt $x + x \neq a$ für ein $x \in \{a, b, c, d\}$. $x$ kann nicht $a$ sein, somit können wir die Elemente $b$, $c$ und $d$ so vertauschen (umbennen), dass $x = b$ ist. Es kann, wegen $0 = a \neq b$, nicht $b + b = b$ gelten. Somit gilt $b + b = c$ oder $b + b = d$. Da wir die Elemente $c$ und $d$ in der Tabelle vertauschen dürfen, können wir annehmen, dass $b + b = c$ gilt. Wir haben also die folgende Tafel:

| $+$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | ? | ? |
| $c$ | $c$ | ? | ? | ? |
| $d$ | $d$ | ? | ? | ? |

Nun betrachten wir $b+d$. $b+d$ kann nur $a$ oder $d$ sein. Wäre $b+d = d$, so wäre $b = 0 = a$, ein Widerspruch zu $b \neq a$. Also gilt $b + d = a = d + b$, und somit $b + c = d = c + b$. Die Tafel sieht also folgendermaßen aus:

| $+$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $d$ | $a$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | ? | ? |
| $d$ | $d$ | $a$ | ? | ? |

Nun muss $c+c = a$ gelten, sonst wäre $c+c = b$, was aber den Widerspruch $a = b+d = b+b+c = c+c = b$ implizieren würde. Damit ist aber $c+d = b = d+c$ und $d+d = c$. Die Tafel sieht also so aus:

| $+$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $d$ | $a$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | $a$ | $b$ |
| $d$ | $d$ | $a$ | $b$ | $c$ |

Das ist aber die Additionstafel (i) von oben.

**Lösung 3.3:**

Voraussetzungen: Sei $I$ eine Menge, und sei für jedes $i \in I$ eine abelsche Gruppe $(G_i, +_i)$ gegeben. Sei auf $G := \prod_{i \in I} G_i$ die folgende Operation $+$ definiert:

$$g + h := (\, i \mapsto g(i) +_i h(i)\, ).$$

Behauptung: $(G, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Beweis: Zuerst zeigen wir, dass $+$ eine Abbildung von $G \times G$ nach $G$ ist. Seien $g, h \in G$, und sei $i \in I$. Dann sind $g(i)$ und $h(i)$ Elemente von $G_i$. Da $(G_i, +_i)$ eine abelsche Gruppe ist, liegt also auch $g(i) +_i h(i)$ in $G_i$. Somit ist $g + h$ ein Element von $G$.
Nun müssen wir prüfen, ob $(G, +)$ die eine abelsche Gruppe definierenden Eigenschaften (K), (A), (N) und (I) besitzt. Seien dafür $f, g, h \in G$.

(K) Zu zeigen ist: $g + h = h + g$. Die Gleichheit zeigen wir, indem wir nachprüfen, ob $g + h$ und $h + g$ dieselbe Abbildung von $I$ in $G$ definieren. Sei dafür $i \in I$ beliebig. Dann ist $(g + h)(i) = g(i) +_i h(i)$. Da $(G_i, +_i)$ eine abelsche Gruppe ist, gilt insbesondere $g(i) +_i h(i) = h(i) +_i g(i)$. Aber die rechte Seite ist gerade $(h + g)(i)$. Somit haben wir gezeigt, dass die beiden Abbildungen auf allen Elementen aus $I$ übereinstimmen. Somit sind sie gleich.

(A) Wir müssen $f + (g + h) = (f + g) + h$ zeigen. Sei $i \in I$. Da $(G_i, +_i)$ eine abelsche Gruppe ist, gilt

$$\begin{aligned}(f + (g + h))(i) &= f(i) +_i (g + h)(i) = f(i) +_i (g(i) +_i h(i)) \\ &= (f(i) +_i g(i)) +_i h(i) = (f + g)(i) +_i h(i) = ((f + g) + h)(i).\end{aligned}$$

(N) Sei 0 das Element in $G$, das jedem Element $i \in I$, das neutrale Element $0_i \in G_i$ zuordnet. Wegen der Existenz und der Eindeutigkeit eines solchen neutralen Elementes, ist 0 eine Abbildung von $I$ nach $G$, also ein Element von $G$. Nun zeigen wir, dass 0 das neutrale Element von $(G, +)$ ist. Sei $i \in I$. Es gilt

$$(g + 0)(i) = g(i) +_i 0(i) = g(i) +_i 0_i = g(i).$$

Somit ist $g + 0 = g$.

(I) Wir definieren für $i \in I$ die $g'(i) := -_i g(i) \in G_i$. $g'$ ist ein Abbildung von $I$ in $G$, da $(G_i, +_i)$ eine abelsche Gruppe ist, und somit genau ein zu $g(i)$ inverses Element $-_i g(i)$ existiert. Es gilt $g + g' = 0$, denn ist $i \in I$, so ist

$$(g + g')(i) = g(i) +_i g'(i) = g(i) +_i (-_i g(i)) = 0_i = 0(i).$$

Somit sind alle Eigenschaften einer abelschen Gruppe nachgerechnet.

**Lösung 3.4:**

(a) Behauptung: $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 2x$, ist ein Gruppenhomomorphismus.
Beweis: $f$ ist eine Abbildung, da für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ aus $x = y$ stets $2x = x+x = y+y = 2y$ folgt. Zu zeigen bleibt, dass für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ stets $f(x + y) = f(x) + f(y)$ gilt. Seien also $x, y \in Z$. Dann ist wegen des Satzes über das Weglassen von Klammern und der Kommutativität der Gruppenaddition

$$f(x + y) = 2(x + y) = (x + y) + (x + y) = x + x + y + y = 2x + 2y = f(x) + f(y).$$

(b) Behauptung: $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^2$, ist kein Gruppenhomomorphismus.
Beweis: $f$ ist eine Abbildung, daran scheitert es nicht. Betrachten wir $x = 1$ und $y = 1$, so gilt

$$f(x+y) = f(1+1) = f(2) = 2^2 = 4 \neq 2 = 1+1 = 1^2+1^2 = f(1)+f(1) = f(x)+f(y).$$

Somit ist $f$ kein Homomorphismus.

(c) Behauptung: $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$, $x \mapsto |x|$, ist kein Gruppenhomomorphismus.
Beweis: Hier scheitert es schon daran, dass $\mathbb{N}_0$ mit den üblichen Operationen $+$ und $\cdot$ keine abelsche Gruppe ist. Aber selbst, wenn wir $\mathbb{N}_0$ durch die additive Gruppe $\mathbb{Z}$ ersetzen, ist dies kein Gruppenhomomorphismus: Seien $x = 1$ und $y = -1$. Dann ist nämlich

$$|x + y| = |1 + (-1)| = |0| = 0 \neq 2 = 1 + 1 = |1| + |-1| = |x| + |y|.$$

(d) Voraussetzung: Sei $\mathbb{R}^\times$ die abelsche Gruppe $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
Behauptung: $f\colon \mathbb{R}^\times \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^\times$, $(x, n) \mapsto x^n$, ist kein Gruppenhomomorphismus.
Beweis: $f$ ist eine Abbildung, da aus $(x, n) = (y, m)$ in $\mathbb{R}^\times \times \mathbb{Z}$ sowohl $x = y$ als auch $n = m$ folgt. Somit gilt auch $x^n = y^m$. Es bezeichne $\oplus$ die Addition auf $\mathbb{R}^\times \times \mathbb{Z}$. Es gilt also $(x, n) \oplus (y, m) = (x \cdot y, n + m)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^\times$ und alle $n, m \in \mathbb{Z}$. Nun betrachten wir die Paare $(2, 3)$ und $(3, 2)$ in $\mathbb{R}^\times \times \mathbb{Z}$. Dann ist

$$f((2,3)\oplus(3,2)) = f(2\cdot3, 3+2) = f(6,5) = 7776 \neq 72 = 8\cdot9 = 2^3\cdot3^2 = f((2,3))\cdot f((3,2)).$$

(e) Voraussetzung: Sei $A$ eine Menge, und $C$ sei eine fest gewählte Teilmenge von $A$. Wir betrachten die abelsche Gruppe $(\mathcal{P}(A), \triangle)$.
Behauptung: $f\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, $B \mapsto B \cap C$, ist ein Gruppenhomomorphismus.
Beweis: $f$ ist eine Abbildung, da aus $B_1 = B_2 \subseteq A$ ja $B_1 \cap C = B_2 \cap C \subseteq C \subseteq A$ folgt. Es bleibt also zu zeigen, dass diese Abbildung ein Homomorphismus ist. Seien $B_1, B_2 \subseteq A$. Dann ist mit Aufgabe 1.1 (c)

$$f(B_1 \triangle B_2) = (B_1 \triangle B_2) \cap C = (B_1 \cap C) \triangle (B_2 \cap C) = f(B_1) \triangle f(B_2).$$