Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2010/2011

Dr. Andrew Dolphin
Prof. Dr. Markus Schweighofer

Übungsblatt 8 zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1.

(a) Zeige, dass $4X^3 - 15X^2 + 60X + 180 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

(b) Zeige, dass $X^3 + 3X^2 + 5X + 5 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

(c) Zeige, dass $X^4 + 2X^2 + 4 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 2. Sei $\sqrt{-3} := \sqrt{3}\mathbb{i} \in \mathbb{C}$, $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ und $K = \mathrm{qf}(R)$.

(a) Zeige

$$R = \{a + b\sqrt{-3} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$$

und

$$K = \{a + b\sqrt{-3} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}.$$

(b) Untersuche die Irreduzibilität von $X^2 + X + 1$ in $R[X]$ und in $K[X]$.

(c) Zeige, dass R nicht faktoriell ist.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ eine diskrete Bewertung auf K mit zugehörigem Bewertungsring $\mathcal{O}_v$ und maximalem Ideal $\mathfrak{m}_v$.

Sei $\pi \in K$ mit $v(\pi) = 1$.

(a) Zeige, dass $k \mapsto (\pi^k)$ eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}_0$ und der Menge der Ideale $I \neq \{0\}$ von $\mathcal{O}_v$ definiert.

(b) Zeige, dass π bis auf Assoziiertheit das einzige irreduzible Element in $\mathcal{O}_v$ ist.

Abgabe bis Montag, den 13. Dezember 2010, vor der Vorlesung.