Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Markus Schweighofer
30. März 2011

Klausur zur Einführung in die Algebra (Modulklausur, Zwischenprüfung)

Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Übungsgruppenleiter:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
erreichte Punktzahl								
Korrektor (Initialen)								
Maximalpunktzahl	8	16	8	10	20	8	30	100

Fassen Sie den Klausurbogen nicht an, bevor die Klausur eröffnet wird!

Entfernen Sie nicht die Klammerung der Blätter. Sobald die Klausur eröffnet wird, tragen Sie auf **jeder Vorderseite sofort** Ihren Namen ein. Schreiben Sie die Lösung zu einer Aufgabe nur auf die dafür vorgesehenen Blätter. Wenn Sie sich nicht ganz sicher sind und noch genug Zeit ist, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Schmierpapier zu schreiben. Vergessen Sie aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen. Soweit nichts anderes gesagt ist, gilt folgendes:

- Alle Antworten sind mathematisch zu begründen.
- Sofern nichts anderes gesagt ist, darf dabei auf mathematische Ergebnisse aus der Vorlesung und der Übung zur Einführung in die Algebra (WS 2010/2011) verwiesen werden (zum Beispiel durch ein Stichwort wie „Hauptsatz der Galoistheorie“ oder durch kurze Beschreibung des Ergebnisses).
- Sie können die einzelnen Teilaufgaben einer Aufgabe in einer anderen als der vorgeschlagenen Reihenfolge bearbeiten und in jeder Teilaufgabe die erzielten (Zwischen-)Ergebnisse aus den vorher bearbeiteten Teilaufgaben verwenden.

Haben Sie irgendwelche Fragen, so zögern Sie nicht, sich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen. Ein Mitarbeiter wird zu Ihnen an den Platz kommen.

Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten. Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind “Spickzettel”[1], Schreibzeug, Schmierpapier[2] und eine Uhr[3]. Viel Erfolg!

[1] ein beidseitig von eigener Hand beschriebenes Blatt im Format A4
[2] anfangs unbeschrieben
[3] ohne eingebaute Kommunikationsgeräte

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 1 (8 Punkte). Sei G eine Gruppe und H eine nichtleere **endliche** Teilmenge, die unter der Gruppenmultiplikation abgeschlossen ist, das heißt es gilt $\emptyset \neq H \subseteq G$ und für alle $a,b \in H$ gilt $ab \in H$. Ist dann H stets eine Untergruppe von G? Gebe einen Beweis oder finde ein Gegenbeispiel!

Lösung zur Aufgabe 1:

Seite 2 zur Aufgabe 1

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 1:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 2 (16 Punkte). Sei G eine Gruppe von ungerader Ordnung und

$$f\colon G \to G,\ a \mapsto a^2.$$

(a) Zeige, dass f ein *Gruppenautomorphismus* ist, wenn G sogar eine abelsche Gruppe ist.

(b) Finde eine Gruppe G ungerader Ordnung und $a,b \in G$ mit $f(ab) \neq f(a)f(b)$.

(c) Zeige, dass für alle $a \in G$ die Elemente a und a^2 dieselbe Untergruppe erzeugen, das heißt

$$\langle a \rangle = \langle a^2 \rangle.$$

(d) Zeige, dass f immer eine *bijektive Abbildung* ist.

Lösung zur Aufgabe 2:

Seite 2 zur Aufgabe 2

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 2:

Name: **Seite 3 zur Aufgabe 2**

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 2:

Seite 4 zur Aufgabe 2

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 2:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 3 (8 Punkte). Zeige, dass das Polynom $X^3 + 3X + 1$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

Lösung zur Aufgabe 3:

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 3:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 4**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei $S := \{3^k \mid k \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{Z}$. Finde ein Polynom $f \in \mathbb{Z}[X]$ derart, dass die Ringe $S^{-1}\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}[X]/(f)$ isomorph sind. (Die Isomorphie ist selbstverständlich nachzuweisen.)

Lösung zur Aufgabe 4:

Seite 2 zur Aufgabe 4

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 4:

Name: **Seite 3 zur Aufgabe 4**

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 4:

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 4:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 5**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 5 (20 Punkte). Betrachte die Ringe

$$A_1 := \mathbb{Z}/(25), A_2 := \mathbb{F}_{25}, A_3 := \mathbb{F}_5[X]/(X^2+1), A_4 := \mathbb{F}_5[X]/(X^2+X+1) \text{ und } A_5 := \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5.$$

Für welche $(i,j) \in \{1,\ldots,5\}^2$ mit $i < j$ sind die Ringe A_i und A_j isomorph und für welche nicht? Begründe Deine Antwort.

Lösung zur Aufgabe 5:

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 5:

Name: **Seite 3 zur Aufgabe 5**

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 5:

Seite 4 zur Aufgabe 5

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 5:

Name: **Seite 5 zur Aufgabe 5**

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 5:

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 5:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 6**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 6 (8 Punkte). Sei $L|K$ eine Körpererweiterung vom Grad $[L : K] = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Sei $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad 3, das in L eine Nullstelle besitzt. Besitzt dann f bereits in K eine Nullstelle? Gebe einen Beweis oder ein Gegenbeispiel!

Lösung zur Aufgabe 6:

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 6:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 7**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 7 (30 Punkte). Sei L der Zerfällungskörper des Polynoms $f := X^3 + 2X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ über $\mathbb{Q}$.

(a) Begründe, warum $L|\mathbb{Q}$ eine endliche Galoiserweiterung ist.

(b) Begründe mit Hilfe von Analysis, warum f genau eine reelle Nullstelle $a_1 \in \mathbb{R}$ hat.

(c) Zeige, dass f irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

Hinweis: Man kann *zum Beispiel* das Reduktionskriterium verwenden.

(d) Begründe, warum es $a_2, a_3 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gibt mit $f = (X - a_1)(X - a_2)(X - a_3)$.

(e) Begründe, warum es $\varphi \in \operatorname{Aut}(L|\mathbb{Q})$ gibt mit $\varphi(a_1) = a_2$.

(f) Bestimme $G := \operatorname{Aut}(L|\mathbb{Q})$ als Untergruppe von S_3.

Hinweis: Zeige zunächst $(2\ 3) \in G$ und benutze dann (e).

(g) Bestimme $[L : \mathbb{Q}]$.

(h) Bestimme alle Untergruppen von $\operatorname{Aut}(L|\mathbb{Q})$.

(i) Bestimme *die Anzahl* der Zwischenkörper von $L|\mathbb{Q}$.

(j) Bestimme $[K : \mathbb{Q}]$ für den Zwischenkörper $K := \mathbb{Q}(x)$ von $L|\mathbb{Q}$ mit

$$x := (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1).$$

Lösung zur Aufgabe 7:

Seite 2 zur Aufgabe 7

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 7:

Name: **Seite 3 zur Aufgabe 7**

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 7:

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 7:

Name: **Seite 5 zur Aufgabe 7**

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 7:

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 7: