Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Dr. Sven Wagner

Sommersemester 2010
Übungsblatt 19
17.05.2010

Lineare Algebra II

Aufgabe 19.1:

Seien die beiden folgenden quadratischen Formen auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^2$ gegeben:

$$q_1\colon (x_1, x_2) \mapsto x_1x_2 \text{ und } q_2\colon (x_1, x_2) \mapsto x_1^2.$$

Zeigen Sie, dass es keine Basis von $\mathbb{R}^2$ gibt, bezüglich derer sowohl die Darstellungsmatrix von q_1 als auch die Darstellungsmatrix von q_2 Diagonalgestalt haben.

Aufgabe 19.2:

Bestimmen Sie die Sylvester–Signaturen der folgenden quadratischen Formen auf $\mathbb{R}^4$:

(a) $q_1\colon (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$

(b) $q_2\colon (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 10x_3x_4 + 6x_4^2$

(c) $q_3\colon (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + x_3^2 + 2x_3x_4 - x_4^2$

(d) $q_4\colon (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto -x_1^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_2x_4 - 4x_3x_4 - 3x_4^2$

Aufgabe 19.3:

Seien $n \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **konvex**, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Sie heißt **streng konvex**, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq y$ und alle $\lambda \in (0, 1)$ gilt:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Zeigen Sie, ohne Ergebnisse aus der Analysis zu verwenden, dass eine quadratische Form q auf $\mathbb{R}^n$ genau dann $\left\{\begin{array}{c}\text{konvex}\\ \text{streng konvex}\end{array}\right\}$ ist, wenn sie $\left\{\begin{array}{c}\text{positiv semidefinit}\\ \text{positiv definit}\end{array}\right\}$ ist.

(Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die quadratische Form $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, streng konvex ist.)

Aufgabe 19.4:

Ist die folgende symmetrische Matrix psd/nsd/pd/nd?

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Abgabe bis Dienstag, den 25. Mai, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.