Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Dr. Sven Wagner

Sommersemester 2010
Übungsblatt 24
21.06.2010

Lineare Algebra II

Aufgabe 24.1:

(a) Bestimmen Sie eine Primfaktorzerlegung von
   (i) 15246 in $\mathbb{Z}$,
   (ii) $X^3 - 2X^2 + X - 2$ in $\mathbb{Q}[X]$ und
   (iii) $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + 1$ in $\mathbb{F}_3[X]$.

(b) Bestimmen Sie einen ggT und ein kgV von $X^8 - X^6 + X^5 - X^4 - X^2 - X + 1$ und $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + 1$ in $\mathbb{F}_3[X]$.

Aufgabe 24.2:

Wir betrachten den Integritätsbereich $\mathbb{Z}[\mathring{\imath}] = \{a + b\mathring{\imath} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\mathring{\imath}]^\times = \{x \in \mathbb{Z}[\mathring{\imath}] \mid |x| = 1\}$ gilt, und geben Sie alle Einheiten an.

(b) Zeigen Sie, dass eine Primzahl $p \in \mathbb{P}$ genau dann reduzibel in $\mathbb{Z}[\mathring{\imath}]$ ist, wenn es $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $p = a^2 + b^2$ gibt.

(c) Überprüfen Sie, ob die Elemente $1 + \mathring{\imath}$, 2, 3 irreduzibel oder gar prim in $\mathbb{Z}[\mathring{\imath}]$ sind.

Aufgabe 24.3:

Nun betrachten wir den Integritätsbereich $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ und die Abbildung $N\colon \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \to \mathbb{Z}$, $a + b\sqrt{5} \mapsto a^2 - 5b^2$.

(a) Zeigen Sie, dass $N(xy) = N(x)N(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]^\times = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \mid N(x) \in \mathbb{Z}^\times\}$ gilt, und geben Sie eine Einheit an, die nicht ± 1 ist.

(c) Zeigen Sie, dass 2 ein irreduzibles Element von $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ ist, das nicht prim ist.

Abgabe bis Montag, den 28. Juni, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.