
Übungsblatt 5 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Im folgenden sei R ein kommutativer Ring und M und N R -Moduln.

Definition (Tensorprodukt):

Ein *Tensorprodukt der R -Moduln M und N* ist ein R -Modul T zusammen mit einer R -bilinearen Abbildung $\tau : M \times N \rightarrow T$ so, dass folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist:

Zu jedem R -Modul L und jeder R -bilinearen Abbildung $\alpha : M \times N \rightarrow L$ existiert genau ein R -lineare Abbildung $\beta : T \rightarrow L$ mit $\alpha = \beta \circ \tau$, wie in folgendem (kommutativen) Diagramm dargestellt.

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\tau} & T \\ & \searrow \forall \alpha & \downarrow \exists! \beta \\ & & L \end{array}$$

Aufgabe 1.

Zeige, dass folgende Konstruktion ein Tensorprodukt von M und N liefert:

Sei $F = R^{(M \times N)}$ der von $M \times N$ frei erzeugte R -Modul. Schreibe die Elemente von F als endliche Linearkombinationen der Gestalt $\sum_i a_i [x_i, y_i]$ ($a_i \in R, x_i \in M, y_i \in N$), wobei $[x, y] := ((a, b) \mapsto \delta_{(x,y)(a,b)})$ und δ das Kronecker-Delta. Sei U der Untermodul, erzeugt von den Elementen

$$[\alpha a + \beta b, \gamma c + \delta d] - \alpha \gamma [a, c] - \alpha \delta [a, d] - \beta \gamma [b, c] - \beta \delta [b, d]$$

($\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R, a, b \in M, c, d \in N$).

Setze nun $T := F/U$ und $\tau : (x, y) \mapsto \overline{[x, y]} \in T$.

Aufgabe 2.

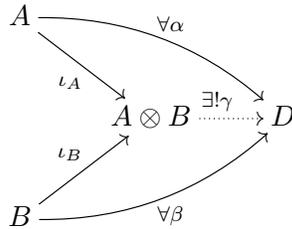
Zeige, dass ein Tensorprodukt in folgendem Sinne bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt ist: Sind (T_1, τ_1) und (T_2, τ_2) zwei Tensorprodukte von M und N so gibt es genau einen Isomorphismus $\phi : T_1 \rightarrow T_2$, der mit den τ_i verträglich ist, d.h. $\tau_2 = \phi \circ \tau_1$.

Man bezeichnet *das* Tensorprodukt (T, τ) von M und N mit $M \otimes_R N$ (oder nur $M \otimes N$) und schreibt $x \otimes y$ für $\tau(x, y)$.

Aufgabe 3.

Seien A und B kommutative R -Algebren. Zeige folgendes:

- a) Auf $A \otimes B$ gibt es genau eine Multiplikation \cdot derart, dass für alle $a, c \in A$ und $b, d \in B$ $(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = ac \otimes bd$ gilt. (Hinweis: Verwende die universelle Eigenschaft.) $A \otimes B$ wird somit auch zu einer R -Algebra.
- b) $\iota_A : A \rightarrow A \otimes B, a \mapsto a \otimes 1$ und $\iota_B : B \rightarrow A \otimes B, b \mapsto 1 \otimes b$ sind R -Algebrenhomomorphismen und $(A \otimes B, \iota_A, \iota_B)$ erfüllt die durch folgendes Diagramm dargestellte universelle Eigenschaft:



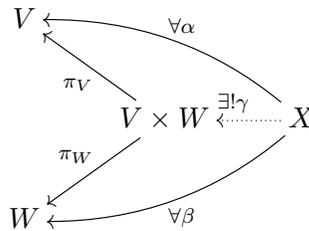
In Worten: Für alle R -Algebren D und Algebrenhomomorphismen α und β wie im Diagramm, existiert genau ein Algebrenhomomorphismus γ , für welchen $\alpha = \gamma \circ \iota_A$ und $\beta = \gamma \circ \iota_B$ gilt.

Eine R -Algebra mit diesen Eigenschaften wird *Tensorprodukt der R -Algebren A und B* genannt und wieder mit $A \otimes_R B$ bzw. $A \otimes B$ bezeichnet.

- c) Zeige, dass auch dieses im obigen Sinne bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig ist.

Aufgabe 4.

Seien V und W affine K -Varietäten. Zeige, dass das Produkt $V \times W$ die durch folgendes Diagramm dargestellte universelle Eigenschaft erfüllt:



In Worten: Für alle affinen K -Varietäten X und Morphismen α und β wie im Diagramm, existiert genau ein Morphismus γ , für welchen $\alpha = \pi_V \circ \gamma$ und $\beta = \pi_W \circ \gamma$ gilt, wobei π_V und π_W die komponentenweisen Projektionen sind.

Abgabe bis Montag, den 21. November 2011, 10:14 Uhr in die Zettelkästen neben F411.