Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2011/2012

Sebastian Gruler
Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 5 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Im folgenden sei R ein kommutativer Ring und M und N R-Moduln.

Definition (Tensorprodukt):
Ein *Tensorprodukt der R-Moduln M und N* ist ein R-Modul T zusammen mit einer R-bilinearen Abbildung $\tau : M \times N \to T$ so, dass folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist:

Zu jedem R-Modul L und jeder R-bilinearen Abbildung $\alpha : M \times N \to L$ existiert genau ein R-lineare Abbildung $\beta : T \to L$ mit $\alpha = \beta \circ \tau$, wie in folgendem (kommutativen) Diagramm dargestellt.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\forall\alpha"'] & T \arrow[d, dotted, "\exists!\beta"] \\ & L \end{tikzcd}$$

Aufgabe 1.
Zeige, dass folgende Konstruktion ein Tensorprodukt von M und N liefert:
Sei $F = R^{(M\times N)}$ der von $M \times N$ frei erzeugte R-Modul. Schreibe die Elemente von F als endliche Linearkombinationen der Gestalt $\sum_i a_i[x_i, y_i]$ ($a_i \in R, x_i \in M, y_i \in N$), wobei $[x, y] := ((a, b) \mapsto \delta_{(x,y)(a,b)})$ und δ das Kronecker-Delta. Sei U der Untermodul, erzeugt von den Elementen

$$[\alpha a + \beta b, \gamma c + \delta d] - \alpha\gamma[a, c] - \alpha\delta[a, d] - \beta\gamma[b, c] - \beta\delta[b, d]$$

($\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R, a, b \in M, c, d \in N$).
Setze nun $T := F/U$ und $\tau : (x, y) \mapsto \overline{[x, y]} \in T$.

Aufgabe 2.
Zeige, dass ein Tensorprodukt in folgendem Sinne bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt ist: Sind (T_1, τ_1) und (T_2, τ_2) zwei Tensorprodukte von M und N so gibt es genau einen Isomorphismus $\phi : T_1 \to T_2$, der mit den τ_i verträglich ist, d.h. $\tau_2 = \phi \circ \tau_1$.

Man bezeichnet *das* Tensorprodukt (T, τ) von M und N mit $M \otimes_R N$ (oder nur $M \otimes N$) und schreibt $x \otimes y$ für $\tau(x, y)$.

Aufgabe 3.
Seien A und B kommutative R-Algebren. Zeige folgendes:

a) Auf $A \otimes B$ gibt es genau eine Multiplikation $\cdot$ derart, dass für alle $a, c \in A$ und $b, d \in B$ $(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = ac \otimes bd$ gilt. (Hinweis: Verwende die universelle Eigenschaft.) $A \otimes B$ wird somit auch zu einer R-Algebra.

b) $\iota_A : A \to A \otimes B, a \mapsto a \otimes 1$ und $\iota_B : B \to A \otimes B, b \mapsto 1 \otimes b$ sind R-Algebrenhomomorphismen und $(A \otimes B, \iota_A, \iota_B)$ erfüllt die durch folgendes Diagramm dargestellte universelle Eigenschaft:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "\iota_A"'] \arrow[drr, bend left, "\forall\alpha"] & & \\
& A \otimes B \arrow[r, dotted, "\exists!\gamma"] & D \\
B \arrow[ur, "\iota_B"] \arrow[urr, bend right, "\forall\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

In Worten: Für alle R-Algebren D und Algebrenhomomorphismen α und β wie im Diagramm, existiert genau ein Algebrenhomomorphismus γ, für welchen $\alpha = \gamma \circ \iota_A$ und $\beta = \gamma \circ \iota_B$ gilt.

Eine R-Algebra mit diesen Eigenschaften wird *Tensorprodukt der R-Algebren* A und B genannt und wieder mit $A \otimes_R B$ bzw. $A \otimes B$ bezeichnet.

c) Zeige, dass auch dieses im obigen Sinne bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig ist.

Aufgabe 4.
Seien V und W affine K-Varietäten. Zeige, dass das Produkt $V \times W$ die durch folgendes Diagramm dargestellte universelle Eigenschaft erfüllt:

$$\begin{tikzcd}
V & & \\
& V \times W \arrow[ul, "\pi_V"] \arrow[dl, "\pi_W"'] & X \arrow[l, dotted, "\exists!\gamma"'] \arrow[ull, bend right, "\forall\alpha"'] \arrow[dll, bend left, "\forall\beta"] \\
W & &
\end{tikzcd}$$

In Worten: Für alle affinen K-Varietäten X und Morphismen α und β wie im Diagramm, existiert genau ein Morphismus γ, für welchen $\alpha = \pi_V \circ \gamma$ und $\beta = \pi_W \circ \gamma$ gilt, wobei π_V und π_W die komponentenweisen Projektionen sind.

Abgabe bis Montag, den 21. November 2011, 10:14 Uhr in die Zettelkästen neben F411.