Universität Konstanz Christoph Hanselka
Fachbereich Mathematik und Statistik Aaron Kunert
Sommersemester 2011 Markus Schweighofer

Übungsblatt 2 zur Zahlentheorie

Sei R ein Ring.

Aufgabe 1.
Ein Diagramm von R-Modulhomomorphismen

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

heißt *exakt*, wenn $\ker(f_i) = \operatorname{im}(f_{i-1})$ für alle i gilt. Schreibt man kurz 0 für den Nullmodul über R, so nennt man ein exaktes Diagramm

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

kurze exakte Sequenz.

Sei das Diagramm

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz. Zeigen Sie

(a) Die Abbildung f ist injektiv, die Abbildung g ist surjektiv.

(b) Es ist $N \cong M/f(L)$.

(c) Die beiden Aussagen

  (i) Es existiert ein R–Modulhomomorphismus $i\colon M \longrightarrow L$ mit $i \circ f = \mathrm{id}_L$.

  (ii) Es existiert ein R–Modulhomomorphismus $j\colon N \longrightarrow M$ mit $g \circ j = \mathrm{id}_N$.

  sind äquivalent. Unter diesen Bedingungen sagt man, dass die kurze exakte Sequenz *zerfällt.*

(d) Zerfällt die kurze exakte Sequenz, so ist $M \cong L \oplus N$ als R–Moduln.

Aufgabe 2.
Seien L ein R–Modul, N und M Untermoduln von L. Beweisen Sie, dass

$$M/(M \cap N) \cong (M + N)/N$$

als R–Moduln.
Hinweis: Verwenden Sie den Homomorphiesatz.

Aufgabe 3.
Sei $L := \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x+2y+3z = 0, x+4y+9z = 0\}$. Zeigen Sie, dass L ein freier Untermodul von $\mathbb{Z}^3$ ist. Finden Sie alle Basen von L.

Abgabe bis Mittwoch, den 27. April 2011, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.