Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2011

Christoph Hanselka
Aaron Kunert
Markus Schweighofer

Übungsblatt 4 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1.
Sei R ein kommutativer Ring mit $0 \neq 1$. Zeige, dass R genau dann ein Körper ist, wenn jeder endlich erzeugte R–Modul frei ist.

Aufgabe 2.
In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass eine Zerlegung in unzerlegbare Moduln im Allgemeinen nicht eindeutig ist.

(a) Zeige, dass jedes Ideal $(0) \neq I \subseteq R$ eines Integritätsrings R ein unzerlegbarer R–Modul ist.

(b) Sei R ein kommutativer Ring und I_1, $I_2 \subseteq R$ *koprime* Ideale, d.h. $I_1 + I_2 = R$. Konstruiere eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow I_1 \cap I_2 \longrightarrow I_1 \oplus I_2 \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

von R–Moduln.

(c) Ist R ein Integritätsring und seien I_1, $I_2 \subset R$ koprime Ideale, so ist $I_1 \oplus I_2 \cong R \oplus (I_1 \cap I_2)$ jeweils eine Zerlegung von $I_1 \oplus I_2$ in unzerlegbare Moduln. (Tip: Blatt 3, Aufgabe 3)

(d) Benutze Teil (c) um einen Ring R und unzerlegbare R–Moduln M_1,M_2,N_1,N_2 zu finden mit $M_1 \oplus M_2 \cong N_1 \oplus N_2$, so dass $N_1 \ncong M_1$ und $N_1 \ncong M_2$.
(Tip: Wähle zum Beispiel $R = \mathbb{Z}[X]$. Wann ist ein Ideal als R–Modul isomorph zu R ?)

Aufgabe 3.
Sei M ein Modul. Dann ist die Menge $\operatorname{End}(M)$ mit der punktweisen Addition und der Hintereinanderschaltung als Multiplikation ein Ring.

Aufgabe 4.
Sei R ein Hauptidealring, M ein zyklischer R–Modul und $N \subseteq M$ ein Untermodul. Zeige, dass auch N ein zyklischer Modul ist. Ist die Aussage immer noch wahr, wenn R ein beliebiger kommutativer Ring ist?

Abgabe bis Montag, den 16. Mai 2011, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.