Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2011

Christoph Hanselka
Aaron Kunert
Markus Schweighofer

Lösungsblatt 3 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1.
Sei $M \subset \mathbb{Q}$ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$–Modul, etwa mit Erzeugern $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}$. Wir schreiben $x_i = \frac{a_i}{b_i}$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{Z}, b_i \neq 0$. Sei k ein gemeinsames Vielfaches der $b_1, \ldots, b_n$. Dann ist $kM \subset \mathbb{Z}$ ein $\mathbb{Z}$–Modul und daher ein Hauptideal. Es gibt also ein $t \in \mathbb{Z}$ mit $kM = \mathbb{Z}t$. Multiplikation mit $\frac{1}{k}$ liefert $M = \mathbb{Z}\frac{1}{k}$, was zeigt, dass M frei vom Rang 1 ist.

Angenommen $\mathbb{Q}$ wäre als $\mathbb{Z}$–Modul endlich erzeugt, so gäbe es ein $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$, so dass $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}\frac{a}{b}$ ist. Ist jedoch p eine Primzahl mit $p \nmid b$, so ist $\frac{1}{p} \notin \mathbb{Z}\frac{a}{b}$. Widerspruch.

Aufgabe 2.

(a) Seien $x_1, \ldots, x_n$ Erzeuger von M. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi\colon R^n &\longrightarrow M \\ (r_1, \ldots, r_n) &\longmapsto r_1 x_1 + \ldots + r_n x_n \end{aligned}$$

ein R–Modulhomomomorphismus. Da die $x_1, \ldots, x_n$ den Modul M erzeugen, ist ϕ surjektiv. Sei $i\colon \ker(\phi) \longrightarrow R^n$ die natürliche Inklusionsabbildung. Dann ist

$$0 \longrightarrow \ker(\phi) \xrightarrow{i} R^n \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0$$

nach Konstruktion von i und ϕ eine kurze exakte Sequenz.

(b) Wir betrachten obige kurze exakte Sequenz und erhalten mit Aufgabe 1.(b) von Blatt 2, dass $M \cong R^n / \ker(\phi)$ ist. Da direkte Summen und Untermoduln von halbeinfachen Moduln halbeinfach sind, ist sowohl R^n als auch $\ker(\phi)$ halbeinfach. Schließlich sind auch Quotienten von halbeinfachen Moduln halbeinfach, woraus die Behauptung folgt.

(c) Wegen Teil (b) genügt es zu zeigen, dass $R = M_{n\times n}(K)$ aufgefasst als R–Modul halbeinfach ist. Für $i = 1, \ldots, n$ bezeichnen wir mit M_i die Menge Matrizen in R, die Einträge verschieden von 0 nur in der i–ten Spalte haben. Offenbar ist jedes dieser M_i ein R–Untermodul von R. Weiter ist $R = \sum_{i=1}^n M_i$. Ist $A \in M_i \cap \sum_{j\neq i} M_j$. So hat A auf der einen Seite nur in Zeile i Einträge ungleich 0, auf der anderen Seite ist A die Summe von Matrizen, die alle in Zeile i nur den Eintrag 0 haben. Daher muss $A = 0$ sein und wir erhalten $R = \oplus_{i=1}^n M_i$. Zuletzt bleibt noch zu zeigen, dass die M_i einfach sind. Angenommen $0 \neq A \in M_i$. Wir fassen die i–te Spalte von A als Vektor $v \in K^n \setminus \{0\}$ auf. Sei $w \in K^n$ beliebig. Dann gibt es eine Matrix $B \in R$ mit $Bv = w$. Insbesondere ist die i–te Spalte von BA der Vektor w. Also gilt $RA = M_i$. Dies zeigt, dass M_i ein einfacher Modul ist, denn jedes von 0 verschiedene Element erzeugt ganz M_i.

Aufgabe 3.
Sei

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz. Wir konstruieren ein $j\colon N \longrightarrow M$ mit $g\circ j = \mathrm{id}_N$. Sei $(a_i)_{i\in I}$ eine Basis von N. Da N frei ist, lässt sich jede Wahl von Werten auf den (a_i) zu einem Modulhomomorphismus fortsetzen. Sei $y_i \in M$ mit $g(y_i) = a_i$. Solch ein y_i existiert für jedes $i \in I$, da g surjektiv ist. Wir definieren $j(a_i) = y_i$. Dann ist $g \circ j(a_i) = g(y_i) = a_i$. Also ist $g \circ j = \mathrm{id}_N$ auf einer Basis von N und damit auf ganz N. Dies zeigt, dass die exakte Sequenz zerfällt.

Ist hingegen zwar M frei nicht jedoch N, so muss diese Sequenz im Allgemeinen nicht zerfallen. Sei dazu $f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ mit $f(z) = 2z$ und $g\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ die natürliche Projektion. Dann ist

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von $\mathbb{Z}$–Moduln. Würde diese zerfallen, so wäre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ein direkter Summand von $\mathbb{Z}$, insbesondere wäre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ein Untermodul von $\mathbb{Z}$. Doch dann gäbe es ein $0 \neq x \in \mathbb{Z}$ mit $x + x = 0$. Dies widerspricht der Nullteilerfreiheit von $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4.
Diese Aussage ist falsch. Wir betrachten dazu die $\mathbb{Z}$–Moduln $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Es ist

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \supset 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \supset 0$$

und

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \supset 0 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \supset 0$$

jeweils eine Kompositionsreihe von $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Beide setzen sich zusammen aus zweimal dem Faktor $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Allerdings gilt $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Den in erstem gibt es ein Element x mit $x + x \neq 0$, in letzterem gilt stets $x + x = 0$.