Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2012/2013

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 1 zur Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Im folgenden sei $n \in \mathbb{N}$ und $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die zyklische Gruppe mit n Elementen. Weiter sei μ das Zählmaß auf G, d.h. für $M \subseteq G$ ist $\mu(M) = \#M$.

Wir betrachten den (endlichdimensionalen) $\mathbb{C}$-Hilbertraum $A := L^2(G)$, also den Vektorraum $\mathbb{C}^G$ der komplexwertigen Funktionen auf G, versehen mit dem Standardskalarprodukt, gegeben durch

$$\langle f, g\rangle := \sum_{x\in G} \overline{f(x)}g(x) = \int\limits_{x\in G} \overline{f(x)}g(x)d\mu(x) = \int \overline{f}g\, d\mu$$

für $f, g \in A$, wobei $\bar{\cdot}$ die komplexe Konjugation bezeichne.

Außerdem definieren wir für $\ell \in G$ mit $\ell = \ell_0 + n\mathbb{Z}$ ($\ell_0 \in \mathbb{Z}$) folgende Elemente von A:

$$\delta^\ell \colon k \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } \ell = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad e^\ell \colon k \mapsto \exp\left(\frac{2\pi i \ell_0 k_0}{n}\right) \text{ für } k_0 \in \mathbb{Z} \text{ mit } k = k_0 + n\mathbb{Z}.$$

Aufgabe 1. Zeige:

(a) $\left(\delta^\ell\right)_{\ell\in G}$ und $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}e^\ell\right)_{\ell\in G}$ sind Orthonormalbasen von A.

(b) Es gibt jeweils genau eine Multiplikation $*$ und $\cdot$, die A zu einer $\mathbb{C}$-Algebra macht mit

$$\delta^k * \delta^\ell = \delta^{k+\ell} \qquad \text{und} \qquad e^k \cdot e^\ell = e^{k+\ell}$$

für alle $k, \ell \in G$.

(c) Es ist $*$ die Faltung, das heißt

$$(f * g)(z) = \int\limits_{x\in G} f(x)g(z-x)\, d\mu(x)$$

für alle $f, g \in A$ und $z \in G$.

(d) Es ist $\cdot$ die punktweise Multiplikation, das heißt $(f \cdot g)(z) = f(z)g(z)$ für alle $f, g \in A$ und $z \in G$.

Bemerkung: $(A, *)$ wird heißt auch *Gruppenalgebra* von G und wird mit $\mathbb{C}[G]$ bezeichnet, wobei man dann ℓ mit δ^ℓ identifiziert für $\ell \in G$, so dass $*$ die Gruppenmultiplikation fortsetzt.

Aufgabe 2. (*Diskrete Fouriertransformation*)
Sei $T\colon A \to A, f \mapsto \widehat{f}$ der $\mathbb{C}$-Vektorraumhomomorphismus, der bestimmt ist durch

$$\widehat{e^\ell} = n\delta^\ell$$

für $\ell \in G$. Zeige:

(a) $\frac{1}{\sqrt{n}}T$ ist unitär (*„Formel von Plancherel"*).

(b) T ist ein Algebrenhomomorphismus $(A, *) \to (A, \cdot)$.

(c) Für $f \in A$ und $z \in G$ gilt

$$\widehat{f}(z) = \langle e^z, f\rangle = \int\limits_{x\in G} \exp\left(-\frac{2\pi i x z}{n}\right) f(x)\, d\mu(x) \qquad \text{und}$$

$$f(z) = \frac{1}{n}\langle \overline{e^z}, \widehat{f}\rangle = \frac{1}{n}\int\limits_{x\in G} \exp\left(\frac{2\pi i x z}{n}\right) \widehat{f}(x)\, d\mu(x).$$

Abgabe bis Montag, den 5. November, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411 .