
Übungsblatt 5 zur Reellen Algebraischen Geometrie I

Aufgabe 16. Sei R ein reell abgeschlossener Körper und $f \in R[X]$ rein reell. Zeige, dass dann die Ableitung f' von f entweder das Nullpolynom oder rein reell ist.

Aufgabe 17. Zeige Proposition 1.5.19 noch einmal

- (a) mit Hilfe der Regel von Descartes 1.5.13 und rein kombinatorischen Überlegungen
- (b) mit Hilfe von Aufgabe 16, dem Zwischenwertsatz 1.4.16 und der Erinnerung 1.5.3, ohne (den Zusatz aus) Lemma 1.5.10 zu benutzen.

Aufgabe 18. Sei R ein reell abgeschlossener Körper und $f \in \mathbb{R}[X]$. Zeige

$$\# \text{sc}(f, 0) \geq \# \text{sc}((1 + X)f, 0).$$

Aufgabe 19. Sei R ein reell abgeschlossener Körper. Bestimme die genau Anzahl der positiven und und die genaue Anzahl der negativen Nullstellen folgender Polynome (gezählt *ohne* Vielfachheiten):

- (a) $X^5 - X^4 + 3X^3 + 9X^2 - X + 5 \in R[X]$
- (b) $4X^7 + 3X^6 + X^5 + 2X^4 - X^3 + 9X^2 + X + 1 \in R[X]$
- (c) $X^5 + X^4 + 4X^3 + 3X^2 + X + 1 \in R[X]$

Abgabe bis Donnerstag, den 29. November, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411 .