Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2012

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 1 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. Sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ *multiplikativ*, das heißt $1 \in S$ und $st \in S$ für alle $s, t \in S$. Sei weiter M ein R-Modul. Wir nennen ein Element $a \in R$ einen *Nichtnullteiler* für M, wenn $ax \neq 0$ für alle $x \in M \setminus \{0\}$, andernfalls nennen wir a einen *Nullteiler* für M.

(a) Zeige, dass auf $M \times S$ durch

$$(x, s) \sim (y, t) :\iff \exists u \in S : utx = usy \qquad (x, y \in M,\ s, t \in S)$$

eine Äquivalenzrelation $\sim$ definiert wird.

(b) Zeige, dass die Abbildungen

$$+\colon ((M \times S)/{\sim}) \times ((M \times S)/{\sim}) \to (M \times S)/{\sim},\ (\widetilde{(x, s)}, \widetilde{(y, t)}) \to \widetilde{(tx + sy, st)} \quad \text{und}$$

$$\cdot\colon ((R \times S)/{\sim}) \times ((M \times S)/{\sim}) \to (M \times S)/{\sim},\ (\widetilde{(a, s)}, \widetilde{(x, t)}) \to \widetilde{(ax, st)}$$

$(a \in R,\ x, y \in M,\ s, t \in S)$ wohldefiniert sind.

(c) Zeige, dass vermöge $+$ die Menge $(M \times S)/{\sim}$ zu einer abelschen Gruppe wird.

(d) Zeige, dass vermöge $+$ und $\cdot$ im Falle $M = R$ die Menge $(R \times S)/{\sim}$ zu einem kommutativen Ring wird.

(e) Zeige, dass $(M \times S)/{\sim}$ durch $+$ und $\cdot$ zu einem $((R \times S)/{\sim})$-Modul wird.

(f) Zeige, dass $\iota\colon M \to ((M \times S)/{\sim}),\ x \mapsto \widetilde{(x, 1)}$ ein Gruppenhomomorphismus ist mit $\ker \iota = \{x \in M \mid \exists s \in S : sx = 0\}$.

(g) Zeige, dass ι injektiv ist genau dann, wenn S nur aus Nichtnullteilern für M besteht.

(h) Zeige, dass $\iota_0\colon R \to (R \times S)/{\sim},\ x \mapsto \widetilde{(x, 1)}$ ein Ringhomomorphismus ist mit $\iota_0(s) \in ((R \times S)/{\sim})^\times$ für alle $s \in S$.

(i) Zeige, dass $\widetilde{(x, s)} = \frac{\iota(x)}{\iota_0(s)}$ für alle $x \in M$ und $s \in S$ (wobei $\frac{\iota(x)}{\iota_0(s)}$ für $\iota_0(s)^{-1}\iota(x)$ steht).

Zur Vereinfachung der Notation schreibt man oft

$$\frac{x}{s} \quad \text{statt} \quad \frac{\iota(x)}{\iota_0(s)} = \widetilde{(x, s)} \qquad (x \in M, s \in S) \qquad \text{und dann auch}$$

$$S^{-1}M \quad \text{statt} \quad \left\{\frac{x}{s} \mid x \in M, s \in S\right\} = (M \times S)/{\sim}\,.$$

Wir nennen $S^{-1}R$ und $S^{-1}M$ die *Lokalisierungen* von R und M nach S.

Aufgabe 2. Sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ multiplikativ.

(a) Seien M und N zwei R-Moduln und f ein R-Modulhomomorphismus. Zeige, dass es dann genau einen $S^{-1}R$-Modulhomomorphismus $S^{-1}f\colon S^{-1}M \to S^{-1}N$ gibt derart, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x \mapsto \frac{x}{1}"'] & N \arrow[d, "y \mapsto \frac{y}{1}"] \\ S^{-1}M \arrow[r, "S^{-1}f"'] & S^{-1}N \end{tikzcd}$$

kommutiert. Wir nennen $S^{-1}f$ die *Lokalisierung* von f nach S.

(b) Sei M ein R-Modul. Zeige $S^{-1}\mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{S^{-1}M}$.

(c) Sei $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ eine Sequenz von R-Moduln. Zeige $S^{-1}(g \circ f) = (S^{-1}g) \circ (S^{-1}f)$.

(d) Überlege und argumentiere, inwiefern und warum Lokalisieren nach S (von R-Moduln und R-Modulhomomorphismen) kommutative Diagramme in kommutative Diagramme überführt.

(e) Begründe, warum Lokalisieren nach S einer halbexakten Sequenz von R-Moduln wieder eine halbexakte Sequenz von R-Moduln liefert.

(f) Begründe, warum Lokalisieren nach S einer exakten Sequenz von R-Moduln wieder eine exakte Sequenz von R-Moduln liefert.

(g) Sei N ein Untermodul des R-Moduls M. Zeige, dass man $S^{-1}N$ in kanonischer Weise als Untermodul des $(S^{-1}R)$-Moduls $S^{-1}M$ auffassen kann und dass eine kanonische Isomorphie $S^{-1}(M/N) \cong (S^{-1}M)/(S^{-1}N)$ von $S^{-1}R$-Moduln besteht.

(h) Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von R-Moduln. Zeige $S^{-1} \bigoplus_{i \in I} M_i = \bigoplus_{i \in I} S^{-1}M_i$.

(i) Sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Zeige, dass $S^{-1}M$ ein endlich erzeugter $S^{-1}R$-Modul ist.

(j) Sei M ein R-Modul. Zeige, dass jeder Untermodul des $(S^{-1}R)$-Moduls $S^{-1}M$ von der Form $S^{-1}N$ für einen Untermodul N von M ist.

(k) Sei M ein noetherscher R-Modul. Zeige, dass $S^{-1}M$ ein noetherscher $S^{-1}R$-Modul ist.

Abgabe in die Zettelkästen neben F411. Dieses Blatt wird in den ersten beiden Übungen besprochen. Die erste Übung findet erst in der dritten Woche der Vorlesungszeit statt, also in der Woche vom 30. April bis 4. Mai. Dafür gibt es in der vierten Woche vom 7. bis 11. Mai eine zusätzliche Übung. Die Vorlesung am 1. Mai entfällt. Die zweite Vorlesung wird von Dienstag, den 24. April, auf Donnerstag, den 26. April, verschoben. Details folgen auf `http://www.math.uni-konstanz.de/~schweigh/lehre.html`.