Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Merlin Carl
Markus Schweighofer
19. März 2014

Klausur zur Linearen Algebra I

Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Übungsgruppenleiter in der Linearen Algebra I:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
erreichte Punktzahl										
Korrektor (Initialen)										
Maximalpunktzahl	14	14	20	10	8	6	10	9	9	100

Fasse den Klausurbogen nicht an, bevor die Klausur eröffnet wird!

Entferne nicht die Klammerung der Blätter. Sobald die Klausur eröffnet wird, trage auf **jeder Vorderseite sofort** Deinen Namen ein. Schreibe die Lösung zu einer Aufgabe nur auf die dafür vorgesehenen Blätter. Wenn Du noch genug Zeit hast, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Schmierpapier zu schreiben. Vergiss aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen.

Bei Manipulation von Matrizen sind die durchgeführten Spalten- oder Zeilenoperationen stets anzugeben (im Stile der Vorlesung oder ähnlich, also etwa $Z_2 \leftrightarrow Z_4$ für Vertauschung der Zeilen 2 und 4 oder $Z_1 \leftarrow Z_1 - 7Z_2$ für Subtrahieren des 7-fachen der Zeile 2 von der Zeile 1). Zögere bei Fragen nicht, Dich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen.

Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten. Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind ein “Spickzettel”[1], Schreibzeug, Schmierpapier[2] und eine Uhr[3]. Viel Erfolg!

[1] ein beidseitig von eigener Hand beschriebenes Blatt im Format A4
[2] anfangs unbeschrieben
[3] ohne eingebaute Kommunikationsgeräte

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 1 (14 Punkte). Schreibe für die folgenden 7 Multiple-Choice-Fragen jeweils die Nummer aller richtigen Antworten unter die jeweilige Frage. Pro Frage sind 2 Punkte zu erreichen. Diese gibt es, wenn genau die richtigen Antworten angegeben sind. Ist nicht jede richtige Antwort, aber mindestens eine und keine falsche Antwort angegeben, so gibt es 1 Punkt. Ist keine oder eine falsche Antwort angegeben, so gibt es 0 Punkte.

(a) Welche Aussagen gelten für alle Funktionen $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$?

(1) Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(2) $f \circ g$ ist nicht definiert.

(3) Ist g injektiv, so auch $g \circ f$.

(4) Durch $c_1 \sim c_2 :\iff \exists a \in A((g \circ f)(a) = c_1 \;\&\; (g \circ f)(a) = c_2)$ $(c_1, c_2 \in A)$ wird eine Äquivalenzrelation auf C definiert.

Richtige Antworten:

(b) Welche Aussagen gelten für alle $f \in (\mathbb{R}^{\mathbb{Q}})^{\mathbb{Z}}$ und $n \in \mathbb{Z}$?

(1) $\frac{1}{2}$ ist ein Element der Definitionsmenge von $f(n)$.

(2) f ist nicht surjektiv.

(3) f ist injektiv.

(4) $(f(5))(\frac{1}{2}) \in \mathbb{R}$

Richtige Antworten:

(c) Was gehört nicht zur Definition einer abelschen Gruppe?

(1) Kommutativität

(2) Assoziativität

(3) Distributivität

(4) Transitivität

Richtige Antworten:

Seite 2 zur Aufgabe 1

(d) Welche Aussagen gelten für alle abelschen Gruppen G, wobei $nx := \overbrace{x + ... + x}^{n\text{-mal}}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in G$?

(1) Existiert zu jedem $x \in G$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx = 0$, so ist G endlich.

(2) Ist G endlich, so existiert zu jedem $x \in G$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx = 0$.

(3) Ist G endlich, so existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}_{>n}$ mit $mx = nx$ für alle $x \in G$.

(4) Existiert ein $x \in G \setminus \{0\}$ und verschiedene $m, n \in \mathbb{N}$ mit $mx = nx$, so ist G endlich.

Richtige Antworten:

(e) Welche Aussagen gelten für jeden Körper K?

(1) $\forall x, y \in K : (x \neq y \implies \exists z \in K : (xy - yx)z = 1)$

(2) $\exists x, y \in K : (x - y \neq y - x)$

(3) $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 \neq 0$ in K

(4) Es gibt nur endlich viele $x \in K$ mit $x^{347827849} = 1$.

Richtige Antworten:

(f) Welche Aussagen gelten für jeden Körper K und jeden K-Vektorraum V?

(1) V ist endlich erzeugt genau dann, wenn V endlichdimensional ist.

(2) V besitzt ein überabzählbares Erzeugendensystem $E \subseteq V$.

(3) Für jedes $v \in V \setminus \{0\}$ ist $K \to V,\ \lambda \mapsto \lambda v$ injektiv.

(4) V hat eine endliche Basis $B \subseteq V$.

Richtige Antworten:

(g) Welche Aussagen gelten für jeden Körper K und jedes $A \in K^{n \times n}$?

(1) Ist $\ker A = \{0\}$, so ist das Gleichungssystem $Ax = b$ ($x \in K^n$) für alle $b \in K^n$ lösbar.

(2) Ist das Gleichungssystem $Ax = b$ ($x \in K^n$) für alle $b \in K^n$ lösbar, so $\ker A = \{0\}$.

(3) Der Zeilenraum von A ist gleich dem Spaltenraum von A.

(4) Die Dimension des Zeilenraumes von A ist gleich der Dimension des Spaltenraumes von A.

Richtige Antworten:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 2 (14 Punkte). Wir betrachten den fünfelementigen Körper $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/(5)$ und schreiben $2 := 1 + 1 \in \mathbb{F}_5$, $3 := 1 + 1 + 1 \in \mathbb{F}_5$ und so weiter. Betrachte weiter den $\mathbb{F}_5$-Vektorraum $V := \mathbb{F}_5^3$ und seine Unterräume

$$U_1 := \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right),\ U_2 := \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}\right),\ U_3 := \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

(a) Berechne die Dimensionen von U_1, U_2 und $U_1 + U_2$. *3 Punkte*

(b) Bestimme die Dimension von $U_1 \cap U_2$. *2 Punkte*

(c) Bestimme eine Basis für U_2 und für den Quotientenvektorraum V/U_2. *3 Punkte*

(d) Bestimme ein lineares Gleichungssystem mit U_1 als Lösungsmenge. *2 Punkte*

(e) Berechne eine Basis für $U_1 \cap U_3$. *4 Punkte*

Lösung zur Aufgabe 2:

Seite 2 zur Aufgabe 2

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 3 (20 Punkte). Die *Permanente* einer Matrix $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in K^{n\times n}$ über einem kommutativen Ring K definiert man durch

$$(*) \qquad \operatorname{perm}(A) := \sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Entscheide jeweils, ob folgende Aussage für jeden kommutativen Ring K und jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Für jede richtige Ja-Nein-Antwort gibt es jeweils einen Punkt. Für jede falsche Ja-Nein-Antwort wird jeweils ein Punkt abgezogen. Wird die richtige Ja-Nein-Antwort zusätzlich begründet, so gibt es jeweils einen zweiten Punkt. Eine negative Gesamtpunktzahl in Aufgabe 3 wird mit null Punkten gezählt.

(a) Die Permanente verhält sich genauso wie die Determinante linear in den Zeilen einer Matrix (wenn man die restlichen Zeilen festhält).

(b) Die Permanente einer Matrix mit zwei identischen Zeilen ist null.

(c) Die Permanente einer Matrix, die eine Nullzeile enthält, ist null.

(d) Die Permanente einer oberen Dreiecksmatrix ist das Produkt ihrer Diagonaleinträge.

(e) Sind $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \overset{Z_i\leftarrow Z_i+\lambda Z_j}{\sim} B$ $(i \neq j, \lambda \in K)$, so gilt $\operatorname{perm} A = \operatorname{perm} B$.

(f) Sind $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \overset{Z_i\leftarrow \lambda Z_i}{\sim} B$ $(\lambda \in K^\times)$, so gilt $\operatorname{perm} A = \frac{1}{\lambda}\operatorname{perm} B$.

(g) Sind $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \overset{Z_i\leftrightarrow Z_j}{\sim} B$ $(i \neq j)$, so gilt $\operatorname{perm} A = \operatorname{perm} B$.

(h) Ist $A \in K^{n\times n}$, so gilt: A invertierbar $\iff \operatorname{perm} A \in K^\times$.

(i) Sind $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \approx B$, dann $\operatorname{perm} A = \operatorname{perm} B$.

(j) Ist $A \in K^{n\times n}$, so $\operatorname{perm}(A) = \operatorname{perm}(A^T)$.

Lösung zur Aufgabe 3:

Seite 2 zur Aufgabe 3

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 3:

Name: **Seite 3 zur Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 3:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 3:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 4**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2n+1} \in K^{(2n+1)\times(2n+1)}$ mit $a_{ij} = 0$ für alle ungeraden $i, j \in \{1, \ldots, 2n+1\}$. Zeige $\det A = 0$.

Lösung zur Aufgabe 4:

Seite 1 zur Aufgabe 4

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 4:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 5**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 5 (8 Punkte). Betrachte den 49-elementigen Körper $\mathbb{F}_{49} := \mathbb{F}_7[\mathring{\imath}]$. Entscheide jeweils mit Begründung, ob es ein (nicht notwendigerweise homogenes) lineares Gleichungssystem ($*$) mit 3 Gleichungen und 5 Unbekannten über $\mathbb{F}_{49}$ mit der angegeben Bedingung gibt.

(a) ($*$) hat keine Lösung. *1 Punkt*

(b) ($*$) hat genau eine Lösung. *1 Punkt*

(c) ($*$) hat mehr als eine, aber nicht mehr als 50 Lösungen. *1 Punkt*

(d) ($*$) hat mehr als 50, aber weniger als 2500 Lösungen. *1 Punkt*

(e) Die Lösungsmenge von ($*$) ist $\left\{ \begin{pmatrix} a+b\mathring{\imath} \\ b+a\mathring{\imath} \\ a+b\mathring{\imath} \\ b+a\mathring{\imath} \\ a+b\mathring{\imath} \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{F}_7 \right\}$. *2 Punkte*

(f) Die Lösungsmenge von ($*$) ist $\left\{ \begin{pmatrix} a+b\mathring{\imath} \\ b+a\mathring{\imath} \\ a+b\mathring{\imath} \\ b+a\mathring{\imath} \\ a+b\mathring{\imath} \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{F}_{49} \right\}$. *2 Punkte*

Lösung zur Aufgabe 5:

Seite 1 zur Aufgabe 5

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 5:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 6**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 6 (6 Punkte). Führe die folgenden beiden Matrizen durch Zeilenumformungen ineinander über oder zeige, dass das unmöglich ist.

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 11 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Lösung zur Aufgabe 6:

Seite 1 zur Aufgabe 6

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 6:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 7**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 7 (10 Punkte). Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $A, B \in K^{n\times n}$ mit $AB = BA$. Das charakteristische Polynom χ_A von A habe n verschiedene Nullstellen. Zeige, dass jeder Eigenvektor von A auch ein Eigenvektor von B ist (eventuell zu einem anderen Eigenwert).

Lösung zur Aufgabe 7:

Seite 2 zur Aufgabe 7

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 7:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 8**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 8 (9 Punkte). Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A. *4 Punkte*

(b) Ist A trigonalisierbar? *2 Punkte*

(c) Ist A diagonalisierbar? *3 Punkte*

Lösung zur Aufgabe 8:

Seite 2 zur Aufgabe 8

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 8:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 9**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 9 (9 Punkte). Es seien K ein Körper und U, V, W drei K-Vektorräume. Weiter seien $f \in \operatorname{Hom}(U, V)$ und $g \in \operatorname{Hom}(V, W)$ derart, dass $g \circ f$ ein Vektorraumisomorphismus ist. Zeige $V = \operatorname{im} f \oplus \ker g$.

Lösung zur Aufgabe 9:

Seite 2 zur Aufgabe 9

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 9: