Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2013

Sebastian Gruler
María López Quijorna
Markus Schweighofer

Übungsblatt 20 zur Reellen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 71. Sei V ein topologischer $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$ eine Linearform.

(a) Zeige, dass φ genau dann stetig ist, wenn der Kern von φ in V abgeschlossen ist.

(b) Gilt (a) allgemeiner für jeden Unterkörper K von $\mathbb{R}$, jeden topologischen K-Vektorraum V und jede K-lineare Abbildung $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$?

Aufgabe 72. Sei K ein Unterkörper von $\mathbb{R}$, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und C ein Kegel in V.

(a) Zeige, dass $U := C - C$ ein Unterraum von V ist.

(b) Zeige, dass C als Kegel in U eine Einheit besitzt.

(c) Zeige, dass es eine K-lineare Abbildung $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \neq 0$ und $\varphi(C) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt, falls C echt ist.

Aufgabe 73. Seien $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper, V ein K-Vektorraum mit $n := \dim V < \infty$, E ein endliches Erzeugendensystem von V und $x \in V$. Zeige, dass genau eine der folgenden Bedingungen gilt:

(a) E enthält eine Basis von V, die einen Kegel aufspannt, der x enthält.

(b) Es gibt $\ell \in V^*$ und eine lineare unabhängige Menge $F \subseteq E \cap \ker \ell$ mit $\#F = n - 1$, $\ell(E) \subseteq K_{\geq 0}$ und $\ell(x) < 0$.

Hinweis: Wähle eine lineare Ordnung $\leq$ auf E und eine Basis $B \subseteq E$ von V. Zeige, dass folgendes Verfahren abbricht:

(1) Schreibe $x = \sum_{v \in B} \lambda_v v$ mit $\lambda_v \in K$ für alle $v \in B$.

(2) Falls $\lambda_v \geq 0$ für alle $v \in B$, breche ab, denn (a) tritt ein.

(3) $u := \min\{v \in B \mid \lambda_v < 0\}$

(4) Definiere $\ell \in V^*$ durch $\ell(u) = 1$ und $\ell(v) = 0$ für alle $v \in B \setminus \{u\}$ (so dass $\ell(x) = \lambda_u < 0$).

(5) Falls $\ell(E) \subseteq K_{\geq 0}$, breche ab, denn (b) tritt ein.

(6) $w := \min\{v \in E \mid \ell(v) < 0\}$

(7) Ersetze B durch die neue Basis $(B \setminus \{u\}) \cup \{w\}$ und gehe zu (1).

Gehe dabei wie folgt vor: Nehme an, das Verfahren bricht nicht ab. Bezeichne dann mit (B_k, u_k, w_k, ℓ_k) die Belegung von (B, u, w, ℓ) nach Schritt (6) des k-ten Schleifendurchlaufs des Algorithmus. Überlege zuerst, warum die Existenz von $s, t \in \mathbb{N}$ mit

$$(*) \qquad u_t \leq u_s = w_t \qquad \text{und} \qquad \{v \in B_s \mid v > u_s\} = \{v \in B_t \mid v > u_s\}$$

einen Widerspruch hervorruft, indem man ℓ_t auf die Darstellung von x in (1) aus dem s-ten Schleifendurchlauf anwendet. Schließlich zeige man die Existenz von $s, t \in \mathbb{N}$ mit $(*)$, wobei man das Verfahren wie folgt verallgemeinern und abstrahieren kann, um einen klaren Kopf zu behalten:

Sei E eine endliche Menge, $\leq$ eine lineare Ordnung auf E und B eine Teilmenge von V.

(1') Wähle $u \in B$.

(2') Wähle $w \in E \setminus B$.

(3') Ersetze B durch $(B \setminus \{u\}) \cup \{w\}$ und gehe zu (1').

Abgabe bis Donnerstag, den 13. Juni, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.