

§3.3 Auflösbare Gruppen

Definition. Sei G eine Gruppe. Für $a, b \in G$ nennt man

$$[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$$

den **Kommutator** von a und b .

Definition. Sei G eine Gruppe. Für $a, b \in G$ nennt man

$$[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$$

den **Kommutator** von a und b .

Man nennt

$$G' := \langle \{[a, b] \mid a, b \in G\} \rangle \leq G$$

die **Kommutatorgruppe** von G .

Definition. Sei G eine Gruppe. Für $a, b \in G$ nennt man

$$[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$$

den **Kommutator** von a und b .

Man nennt

$$G' := \langle \{[a, b] \mid a, b \in G\} \rangle \leq G$$

die **Kommutatorgruppe** von G .

Weiter definiert man für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die **n -te Kommutatorgruppe** $G^{(n)}$ von G rekursiv durch

$$G^{(0)} := G \quad \text{und} \quad G^{(n+1)} := (G^{(n)})'$$

für $n \in \mathbb{N}_0$.

Bemerkung. Sei G eine Gruppe.

$$(a) \quad \forall a, b \in G : ([a, b] = 1 \iff ab = ba)$$

Bemerkung. Sei G eine Gruppe.

(a) $\forall a, b \in G : ([a, b] = 1 \iff ab = ba)$

(b) $G' = \{[a_1, b_1] \cdots [a_m, b_m] \mid m \in \mathbb{N}_0, a_i, b_i \in G\}$

Bemerkung. Sei G eine Gruppe.

(a) $\forall a, b \in G : ([a, b] = 1 \iff ab = ba)$

(b) $G' = \{[a_1, b_1] \cdots [a_m, b_m] \mid m \in \mathbb{N}_0, a_i, b_i \in G\}$

[„ \supseteq “ klar;

Bemerkung. Sei G eine Gruppe.

(a) $\forall a, b \in G : ([a, b] = 1 \iff ab = ba)$

(b) $G' = \{[a_1, b_1] \cdots [a_m, b_m] \mid m \in \mathbb{N}_0, a_i, b_i \in G\}$

[„ \supseteq “ klar;

„ \subseteq “ beachte $[a, b]^{-1} = (aba^{-1}b^{-1})^{-1} = bab^{-1}a^{-1} = [b, a]$ für $a, b \in G$]

Bemerkung. Sei G eine Gruppe.

(a) $\forall a, b \in G : ([a, b] = 1 \iff ab = ba)$

(b) $G' = \{[a_1, b_1] \cdots [a_m, b_m] \mid m \in \mathbb{N}_0, a_i, b_i \in G\}$

[„ \supseteq “ klar;

„ \subseteq “ beachte $[a, b]^{-1} = (aba^{-1}b^{-1})^{-1} = bab^{-1}a^{-1} = [b, a]$ für $a, b \in G$

(c) G' ist der kleinste Normalteiler N von G mit G/N abelsch.

Bemerkung. Sei G eine Gruppe.

(a) $\forall a, b \in G : ([a, b] = 1 \iff ab = ba)$

(b) $G' = \{[a_1, b_1] \cdots [a_m, b_m] \mid m \in \mathbb{N}_0, a_i, b_i \in G\}$

[„ \supseteq “ klar;

„ \subseteq “ beachte $[a, b]^{-1} = (aba^{-1}b^{-1})^{-1} = bab^{-1}a^{-1} = [b, a]$ für $a, b \in G$

(c) G' ist der kleinste Normalteiler N von G mit G/N abelsch.

[G' ist eine charakteristische Untergruppe und daher ein Normalteiler von G ;

Bemerkung. Sei G eine Gruppe.

(a) $\forall a, b \in G : ([a, b] = 1 \iff ab = ba)$

(b) $G' = \{[a_1, b_1] \cdots [a_m, b_m] \mid m \in \mathbb{N}_0, a_i, b_i \in G\}$

[„ \supseteq “ klar;

„ \subseteq “ beachte $[a, b]^{-1} = (aba^{-1}b^{-1})^{-1} = bab^{-1}a^{-1} = [b, a]$ für $a, b \in G$

(c) G' ist der kleinste Normalteiler N von G mit G/N abelsch.

[G' ist eine charakteristische Untergruppe und daher ein Normalteiler von G ;

ist $N \triangleleft G$ mit G/N abelsch, so

$$\overline{[a, b]}^N = \overline{a} \overline{b} \overline{a}^{-1} \overline{b}^{-1} = \overline{a} \overline{a}^{-1} \overline{b} \overline{b}^{-1} = 1$$

Bemerkung. Sei G eine Gruppe.

(a) $\forall a, b \in G : ([a, b] = 1 \iff ab = ba)$

(b) $G' = \{[a_1, b_1] \cdots [a_m, b_m] \mid m \in \mathbb{N}_0, a_i, b_i \in G\}$

[„ \supseteq “ klar;

„ \subseteq “ beachte $[a, b]^{-1} = (aba^{-1}b^{-1})^{-1} = bab^{-1}a^{-1} = [b, a]$ für $a, b \in G$

(c) G' ist der kleinste Normalteiler N von G mit G/N abelsch.

[G' ist eine charakteristische Untergruppe und daher ein Normalteiler von G ;

ist $N \triangleleft G$ mit G/N abelsch, so

$\overline{[a, b]}^N = \overline{a} \overline{b} \overline{a}^{-1} \overline{b}^{-1} = \overline{a a^{-1} N} \overline{b b^{-1} N} = 1$ und daher $[a, b] \in N$ für alle $a, b \in G$,

Bemerkung. Sei G eine Gruppe.

(a) $\forall a, b \in G : ([a, b] = 1 \iff ab = ba)$

(b) $G' = \{[a_1, b_1] \cdots [a_m, b_m] \mid m \in \mathbb{N}_0, a_i, b_i \in G\}$

[„ \supseteq “ klar;

„ \subseteq “ beachte $[a, b]^{-1} = (aba^{-1}b^{-1})^{-1} = bab^{-1}a^{-1} = [b, a]$ für $a, b \in G$

(c) G' ist der kleinste Normalteiler N von G mit G/N abelsch.

[G' ist eine charakteristische Untergruppe und daher ein Normalteiler von G ;

ist $N \triangleleft G$ mit G/N abelsch, so

$\overline{[a, b]}^N = \overline{a} \overline{b} \overline{a}^{-1} \overline{b}^{-1} = \overline{a a^{-1} N} \overline{b b^{-1} N} = 1$ und daher $[a, b] \in N$ für alle $a, b \in G$, woraus $G' \subseteq N$ folgt]

Definition. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Eine Permutation der Form

$$(x_1 \dots x_\ell) := \left(\begin{array}{c} \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \\ \\ \begin{array}{ccccc} & & x_1 & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ x_\ell & & & & x_2 \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ \vdots & & & & x_3 \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ & & x_4 & & \end{array} \\ \\ x \mapsto x \text{ f\"ur } x \in \{1, \dots, n\} \setminus \{x_1, \dots, x_\ell\} \end{array} \right)$$

mit $\ell \in \{2, \dots, n\}$ und paarweise verschiedenen $x_1, \dots, x_\ell \in \{1, \dots, n\}$ nennt man einen **ℓ -Zykel** in S_n .

Definition. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Eine Permutation der Form

$$(x_1 \dots x_\ell) := \left(\begin{array}{c} \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \\ \\ \begin{array}{ccccc} & & x_1 & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ x_\ell & & & & x_2 \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ \vdots & & & & x_3 \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ & & x_4 & & \end{array} \\ \\ x \mapsto x \text{ f\"ur } x \in \{1, \dots, n\} \setminus \{x_1, \dots, x_\ell\} \end{array} \right)$$

mit $\ell \in \{2, \dots, n\}$ und paarweise verschiedenen $x_1, \dots, x_\ell \in \{1, \dots, n\}$ nennt man einen **ℓ -Zykel** in S_n .

Man nennt 2-Zykel auch Transpositionen.

Proposition. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann

$$A_n = \{\sigma_1 \cdots \sigma_m \mid m \in \mathbb{N}_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m \text{ 3-Zykel in } S_n\}.$$

Proposition. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann

$$A_n = \{\sigma_1 \cdots \sigma_m \mid m \in \mathbb{N}_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m \text{ 3-Zykel in } S_n\}.$$

Beweis.

„ \supseteq “ Seien $x_1, x_2, x_3 \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschieden.

Zu zeigen: $(x_1 \ x_2 \ x_3) \in A_n$.

Proposition. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann

$$A_n = \{\sigma_1 \cdots \sigma_m \mid m \in \mathbb{N}_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m \text{ 3-Zykel in } S_n\}.$$

Beweis.

„ \supseteq “ Seien $x_1, x_2, x_3 \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschieden.

Zu zeigen: $(x_1 \ x_2 \ x_3) \in A_n$.

Dies folgt aus $(x_1 \ x_2 \ x_3) = (x_2 \ x_3)(x_1 \ x_3)$.

„ \subseteq “ Sind $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschieden, so

$(x_1 \ x_2)(x_3 \ x_4) = (x_1 \ x_3 \ x_2)(x_1 \ x_3 \ x_4)$.

Proposition. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann

$$A_n = \{\sigma_1 \cdots \sigma_m \mid m \in \mathbb{N}_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m \text{ 3-Zykel in } S_n\}.$$

Beweis.

„ \supseteq “ Seien $x_1, x_2, x_3 \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschieden.

Zu zeigen: $(x_1 \ x_2 \ x_3) \in A_n$.

Dies folgt aus $(x_1 \ x_2 \ x_3) = (x_2 \ x_3)(x_1 \ x_3)$.

„ \subseteq “ Sind $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschieden, so

$$(x_1 \ x_2)(x_3 \ x_4) = (x_1 \ x_3 \ x_2)(x_1 \ x_3 \ x_4).$$

Sind $x_1, x_2, x_3 \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschieden, so

$$(x_1 \ x_2)(x_2 \ x_3) = (x_1 \ x_2 \ x_3).$$

Proposition. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann

$$A_n = \{\sigma_1 \cdots \sigma_m \mid m \in \mathbb{N}_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m \text{ 3-Zykel in } S_n\}.$$

Beweis.

„ \supseteq “ Seien $x_1, x_2, x_3 \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschieden.

Zu zeigen: $(x_1 \ x_2 \ x_3) \in A_n$.

Dies folgt aus $(x_1 \ x_2 \ x_3) = (x_2 \ x_3)(x_1 \ x_3)$.

„ \subseteq “ Sind $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschieden, so

$$(x_1 \ x_2)(x_3 \ x_4) = (x_1 \ x_3 \ x_2)(x_1 \ x_3 \ x_4).$$

Sind $x_1, x_2, x_3 \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschieden, so

$$(x_1 \ x_2)(x_2 \ x_3) = (x_1 \ x_2 \ x_3).$$

Sind $x_1, x_2 \in \{1, \dots, n\}$ mit $x_1 \neq x_2$, so

$$(x_1 \ x_2)(x_1 \ x_2) = 1.$$



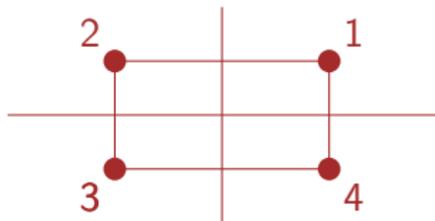
Proposition. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann $S'_n = A_n$ und

Proposition. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann $S'_n = A_n$ und

$$A'_n = \begin{cases} \{1\} & \text{falls } n \leq 3, \\ V_4 := \{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \cong V & \text{falls } n = 4, \\ A_n & \text{falls } n \geq 5. \end{cases}$$

Proposition. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann $S'_n = A_n$ und

$$A'_n = \begin{cases} \{1\} & \text{falls } n \leq 3, \\ V_4 := \{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \cong V & \text{falls } n = 4, \\ A_n & \text{falls } n \geq 5. \end{cases}$$



Proposition. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann $S'_n = A_n$ und

$$A'_n = \begin{cases} \{1\} & \text{falls } n \leq 3, \\ V_4 := \{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \cong V & \text{falls } n = 4, \\ A_n & \text{falls } n \geq 5. \end{cases}$$

Beweis.

$S'_n \subseteq A_n$ Es genügt zu zeigen, dass S_n/A_n abelsch ist. Dies ist klar, da $S_n/A_n \cong C_2$ für $n \geq 2$ und $S_n/A_n \cong C_1$ für $n \in \{0, 1\}$.

$A_n \subseteq S'_n$ Es genügt zu zeigen, dass jeder 3-Zykel in S'_n liegt. Seien hierzu x_1, x_2, x_3 paarweise verschieden. Dann

$$(x_1\ x_2\ x_3) = (x_1\ x_3)(x_2\ x_3)(x_1\ x_3)^{-1}(x_2\ x_3)^{-1} = [(x_1\ x_3), (x_2\ x_3)] \in S'_n.$$

Proposition. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann $S'_n = A_n$ und

$$A'_n = \begin{cases} \{1\} & \text{falls } n \leq 3, \\ V_4 := \{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \cong V & \text{falls } n = 4, \\ A_n & \text{falls } n \geq 5. \end{cases}$$

Beweis.

$A'_n = \{1\}$ für $n \leq 3$ Für $n \leq 3$ ist $A_n \cong A_n/\{1\}$ abelsch, da $\#A_n \leq \#A_3 = \frac{\#S_3}{2} = \frac{3!}{2} = 3$.

Proposition. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann $S'_n = A_n$ und

$$A'_n = \begin{cases} \{1\} & \text{falls } n \leq 3, \\ V_4 := \{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \cong V & \text{falls } n = 4, \\ A_n & \text{falls } n \geq 5. \end{cases}$$

Beweis.

$A'_4 = V_4$ „ \subseteq “ Wegen $\#A_4 = \frac{4!}{2} = 4 \cdot 3 = 12$ gilt $\#(A_4/V_4) = 3$ und A_4/V_4 ist abelsch.

Proposition. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann $S'_n = A_n$ und

$$A'_n = \begin{cases} \{1\} & \text{falls } n \leq 3, \\ V_4 := \{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \cong V & \text{falls } n = 4, \\ A_n & \text{falls } n \geq 5. \end{cases}$$

Beweis.

$A'_4 = V_4$ „ \subseteq “ Wegen $\#A_4 = \frac{4!}{2} = 4 \cdot 3 = 12$ gilt $\#(A_4/V_4) = 3$ und A_4/V_4 ist abelsch.

„ \supseteq “ Ist $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$, so

$$\begin{aligned} (x_1\ x_2)(x_3\ x_4) &= (x_1\ x_2\ x_3)(x_1\ x_2\ x_4)(x_1\ x_2\ x_3)^{-1}(x_1\ x_2\ x_4)^{-1} \\ &= [(x_1\ x_2\ x_3), (x_1\ x_2\ x_4)] \in A'_4. \end{aligned}$$

Proposition. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann $S'_n = A_n$ und

$$A'_n = \begin{cases} \{1\} & \text{falls } n \leq 3, \\ V_4 := \{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \cong V & \text{falls } n = 4, \\ A_n & \text{falls } n \geq 5. \end{cases}$$

Beweis.

$A'_n = A_n$ falls $n \geq 5$ Sei $n \geq 5$. Zu zeigen: $A_n \subseteq A'_n$.

Seien $x_1, x_2, x_3 \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschieden.

Zu zeigen: $(x_1\ x_2\ x_3) \in A'_n$.

Wähle $x_4, x_5 \in \{1, \dots, n\} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$ mit $x_4 \neq x_5$. Dann

$$\begin{aligned} (x_1\ x_2\ x_3) &= (x_1\ x_2\ x_4)(x_1\ x_3\ x_5)(x_1\ x_2\ x_4)^{-1}(x_1\ x_3\ x_5)^{-1} \\ &= [(x_1\ x_2\ x_4), (x_1\ x_3\ x_5)] \in A'_n. \end{aligned}$$



Definition. Sei G eine Gruppe. Es heißt (G_0, \dots, G_n) eine **Normalreihe** von G , wenn

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_n = \{1\}.$$

Definition. Sei G eine Gruppe. Es heißt (G_0, \dots, G_n) eine **Normalreihe** von G , wenn

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_n = \{1\}.$$

In diesem Fall heißen die Gruppen G_k/G_{k+1} ($k \in \{0, \dots, n-1\}$) die **Faktoren** dieser Normalreihe.

Definition. Sei G eine Gruppe. Es heißt (G_0, \dots, G_n) eine **Normalreihe** von G , wenn

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_n = \{1\}.$$

In diesem Fall heißen die Gruppen G_k/G_{k+1} ($k \in \{0, \dots, n-1\}$) die **Faktoren** dieser Normalreihe.

Es heißt G **auflösbar**, wenn G eine Normalreihe mit (lauter) abelschen Faktoren besitzt.

Satz. Sei G eine Gruppe. Dann

$$G \text{ auflösbar} \iff \exists n \in \mathbb{N}_0 : G^{(n)} = \{1\}.$$

Satz. Sei G eine Gruppe. Dann

$$G \text{ auflösbar} \iff \exists n \in \mathbb{N}_0 : G^{(n)} = \{1\}.$$

Beweis.

„ \Leftarrow “ Ist $n \in \mathbb{N}_0$ mit $G^{(n)} = \{1\}$, so ist $(G^{(0)}, \dots, G^{(n)})$ eine Normalreihe von G mit abelschen Faktoren.

Satz. Sei G eine Gruppe. Dann

$$G \text{ auflösbar} \iff \exists n \in \mathbb{N}_0 : G^{(n)} = \{1\}.$$

Beweis.

„ \Leftarrow “ Ist $n \in \mathbb{N}_0$ mit $G^{(n)} = \{1\}$, so ist $(G^{(0)}, \dots, G^{(n)})$ eine Normalreihe von G mit abelschen Faktoren.

„ \Rightarrow “ Sei (G_0, \dots, G_n) eine Normalreihe von G mit abelschen Faktoren. Wir zeigen durch Induktion nach $k \in \{0, \dots, n\}$, dass $G^{(k)} \subseteq G_k$:

Satz. Sei G eine Gruppe. Dann

$$G \text{ auflösbar} \iff \exists n \in \mathbb{N}_0 : G^{(n)} = \{1\}.$$

Beweis.

„ \Leftarrow “ Ist $n \in \mathbb{N}_0$ mit $G^{(n)} = \{1\}$, so ist $(G^{(0)}, \dots, G^{(n)})$ eine Normalreihe von G mit abelschen Faktoren.

„ \Rightarrow “ Sei (G_0, \dots, G_n) eine Normalreihe von G mit abelschen Faktoren. Wir zeigen durch Induktion nach $k \in \{0, \dots, n\}$, dass $G^{(k)} \subseteq G_k$:

$$\underline{k=0} \quad G^{(0)} = G = G_0$$

Satz. Sei G eine Gruppe. Dann

$$G \text{ auflösbar} \iff \exists n \in \mathbb{N}_0 : G^{(n)} = \{1\}.$$

Beweis.

„ \Leftarrow “ Ist $n \in \mathbb{N}_0$ mit $G^{(n)} = \{1\}$, so ist $(G^{(0)}, \dots, G^{(n)})$ eine Normalreihe von G mit abelschen Faktoren.

„ \Rightarrow “ Sei (G_0, \dots, G_n) eine Normalreihe von G mit abelschen Faktoren. Wir zeigen durch Induktion nach $k \in \{0, \dots, n\}$, dass $G^{(k)} \subseteq G_k$:

$$\underline{k = 0} \quad G^{(0)} = G = G_0$$

$$\underline{k \rightarrow k + 1 \quad (k \in \{0, \dots, n - 1\})}$$

$$G^{(k+1)} = (G^{(k)})' \underset{G^{(k)} \subseteq G_k}{\subseteq} G'_k \underset{\substack{G_k/G_{k+1} \\ \text{abelsch}}}{\subseteq} G_{k+1}$$

□

Satz. S_n ist auflösbar für $n \leq 4$, nicht aber für $n \geq 5$.

Satz. S_n ist auflösbar für $n \leq 4$, nicht aber für $n \geq 5$.

Beweis.

Es gilt $S_n^{(2)} = A'_n = \{1\}$ für $n \leq 3$,

Satz. S_n ist auflösbar für $n \leq 4$, nicht aber für $n \geq 5$.

Beweis.

Es gilt $S_n^{(2)} = A'_n = \{1\}$ für $n \leq 3$,

$$S_4^{(3)} = A_4^{(2)} = V'_4 \stackrel{V_4 \cong V \cong C_2 \times C_2}{=} \text{abelsch} \{1\}$$

Satz. S_n ist auflösbar für $n \leq 4$, nicht aber für $n \geq 5$.

Beweis.

Es gilt $S_n^{(2)} = A'_n = \{1\}$ für $n \leq 3$,

$$S_4^{(3)} = A_4^{(2)} = V'_4 \stackrel{V_4 \cong V \cong C_2 \times C_2}{=} \underset{\text{abelsch}}{\quad} \{1\}$$

und $S_n^{(1)} = S_n^{(2)} = \dots = A_n \neq \{1\}$ für $n \geq 5$. □

Proposition. Sei G eine Gruppe.

(a) Ist G auflösbar und $H \leq G$, so ist auch H auflösbar.

(b) Ist $N \triangleleft G$, so

$$G \text{ auflösbar} \iff (N \text{ auflösbar} \ \& \ G/N \text{ auflösbar}).$$

Beweis.

Proposition. Sei G eine Gruppe.

(a) Ist G auflösbar und $H \leq G$, so ist auch H auflösbar.

(b) Ist $N \triangleleft G$, so

$$G \text{ auflösbar} \iff (N \text{ auflösbar} \ \& \ G/N \text{ auflösbar}).$$

Beweis.

(a) Klar, da man durch Induktion $H^{(n)} \subseteq G^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ zeigt.

Proposition. Sei G eine Gruppe.

(a) Ist G auflösbar und $H \leq G$, so ist auch H auflösbar.

(b) Ist $N \triangleleft G$, so

$$G \text{ auflösbar} \iff (N \text{ auflösbar} \ \& \ G/N \text{ auflösbar}).$$

Beweis.

(b) Gelte $N \triangleleft G$. Durch Induktion zeigt man $(G/N)^{(n)} = (G^{(n)}N)/N$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\underline{n=0} \quad G/N = \overbrace{(GN)}^{=G} / N$$

$$\underline{n \rightarrow n+1 \ (n \in \mathbb{N}_0)}$$

$$\begin{aligned} (G/N)^{(n+1)} &= ((G/N)^{(n)})' \stackrel{\text{IV}}{=} ((G^{(n)}N)/N)' \\ &= \{[\overline{a_1 n_1}, \overline{a'_1 n'_1}] \cdots [\overline{a_m n_m}, \overline{a'_m n'_m}] \mid m \in \mathbb{N}_0, a_i, a'_i \in G^{(n)}, n_i, n'_i \in N\} \\ &= \{[\overline{a_1, a'_1}] \cdots [\overline{a_m, a'_m}] \mid m \in \mathbb{N}_0, a_i, a'_i \in G^{(n)}\} \\ &= \{\overline{g} \mid g \in G^{(n+1)}\} = \{\overline{gn} \mid g \in G^{(n+1)}, n \in N\} = (G^{(n+1)}N)/N \end{aligned}$$

Proposition. Sei G eine Gruppe.

(a) Ist G auflösbar und $H \leq G$, so ist auch H auflösbar.

(b) Ist $N \triangleleft G$, so

$$G \text{ auflösbar} \iff (N \text{ auflösbar} \ \& \ G/N \text{ auflösbar}).$$

Beweis.

„ \implies “ Ist $n \in \mathbb{N}$ mit $G^{(n)} = \{1\}$, so

$$(G/N)^{(n)} = (G^{(n)}N)/N = N/N = \{1\}.$$

Proposition. Sei G eine Gruppe.

(a) Ist G auflösbar und $H \leq G$, so ist auch H auflösbar.

(b) Ist $N \triangleleft G$, so

$$G \text{ auflösbar} \iff (N \text{ auflösbar} \ \& \ G/N \text{ auflösbar}).$$

Beweis.

„ \implies “ Ist $n \in \mathbb{N}$ mit $G^{(n)} = \{1\}$, so

$$(G/N)^{(n)} = (G^{(n)}N)/N = N/N = \{1\}.$$

„ \impliedby “ Ist $n \in \mathbb{N}$ mit $N^{(n)} = \{1\}$ und $(G/N)^{(n)} = \{1\}$, so

$$(G^{(n)}N)/N = N/N,$$

also $G^{(n)} \subseteq N$ und $G^{(2n)} \subseteq N^{(n)} = \{1\}$. □

Satz. Sei $p \in \mathbb{P}$. Jede p -Gruppe ist auflösbar.

Satz. Sei $p \in \mathbb{P}$. Jede p -Gruppe ist auflösbar.

Beweis.

Wir zeigen durch Induktion nach $e \in \mathbb{N}_0$, dass alle Gruppen G mit $\#G = p^e$ auflösbar sind.

Satz. Sei $p \in \mathbb{P}$. Jede p -Gruppe ist auflösbar.

Beweis.

Wir zeigen durch Induktion nach $e \in \mathbb{N}_0$, dass alle Gruppen G mit $\#G = p^e$ auflösbar sind.

$e = 0$ ✓

Satz. Sei $p \in \mathbb{P}$. Jede p -Gruppe ist auflösbar.

Beweis.

Wir zeigen durch Induktion nach $e \in \mathbb{N}_0$, dass alle Gruppen G mit $\#G = p^e$ auflösbar sind.

$e = 0$ ✓

$0, \dots, e - 1 \rightarrow e$ ($e \in \mathbb{N}$) Sei G eine Gruppe mit $\#G = p^e$.

Satz. Sei $p \in \mathbb{P}$. Jede p -Gruppe ist auflösbar.

Beweis.

Wir zeigen durch Induktion nach $e \in \mathbb{N}_0$, dass alle Gruppen G mit $\#G = p^e$ auflösbar sind.

$e = 0$ ✓

$0, \dots, e - 1 \rightarrow e$ ($e \in \mathbb{N}$) Sei G eine Gruppe mit $\#G = p^e$.

Es gilt $\#Z(G) > 1$.

Satz. Sei $p \in \mathbb{P}$. Jede p -Gruppe ist auflösbar.

Beweis.

Wir zeigen durch Induktion nach $e \in \mathbb{N}_0$, dass alle Gruppen G mit $\#G = p^e$ auflösbar sind.

$e = 0$ ✓

$0, \dots, e - 1 \rightarrow e$ ($e \in \mathbb{N}$) Sei G eine Gruppe mit $\#G = p^e$.

Es gilt $\#Z(G) > 1$. Nach dem Satz von Lagrange gibt es also $d \in \{0, \dots, e - 1\}$ mit $\#(G/Z(G)) = p^d$.

Satz. Sei $p \in \mathbb{P}$. Jede p -Gruppe ist auflösbar.

Beweis.

Wir zeigen durch Induktion nach $e \in \mathbb{N}_0$, dass alle Gruppen G mit $\#G = p^e$ auflösbar sind.

$e = 0$ ✓

$0, \dots, e - 1 \rightarrow e$ ($e \in \mathbb{N}$) Sei G eine Gruppe mit $\#G = p^e$.

Es gilt $\#Z(G) > 1$. Nach dem Satz von Lagrange gibt es also $d \in \{0, \dots, e - 1\}$ mit $\#(G/Z(G)) = p^d$.

Nach Induktionsvoraussetzung ist $G/Z(G)$ auflösbar.

Satz. Sei $p \in \mathbb{P}$. Jede p -Gruppe ist auflösbar.

Beweis.

Wir zeigen durch Induktion nach $e \in \mathbb{N}_0$, dass alle Gruppen G mit $\#G = p^e$ auflösbar sind.

$e = 0$ ✓

$0, \dots, e - 1 \rightarrow e$ ($e \in \mathbb{N}$) Sei G eine Gruppe mit $\#G = p^e$.

Es gilt $\#Z(G) > 1$. Nach dem Satz von Lagrange gibt es also $d \in \{0, \dots, e - 1\}$ mit $\#(G/Z(G)) = p^d$.

Nach Induktionsvoraussetzung ist $G/Z(G)$ auflösbar.

Da $Z(G)$ abelsch und daher auch auflösbar ist, ist auch G auflösbar.



Proposition. Sei G eine Gruppe und $N \triangleleft G$.

Proposition. Sei G eine Gruppe und $N \triangleleft G$.

Bezeichne $\pi: G \rightarrow G/N, a \mapsto \bar{a}^N$ den kanonischen Epimorphismus.

Proposition. Sei G eine Gruppe und $N \triangleleft G$.

Bezeichne $\pi: G \rightarrow G/N, a \mapsto \bar{a}^N$ den kanonischen Epimorphismus.

Dann wird durch die Zuordnungen

$$I \mapsto \pi(I) = I/N \quad \text{und} \\ \pi^{-1}(J) \leftarrow J$$

eine Bijektion zwischen der Menge der $\left\{ \begin{array}{l} \text{Untergruppen} \\ \text{Normalteiler} \end{array} \right\}$ I von G mit

$N \subseteq I$ und der Menge der $\left\{ \begin{array}{l} \text{Untergruppen} \\ \text{Normalteiler} \end{array} \right\}$ von G/N definiert.

Beweis.

Übung. □

Satz. Sei G eine endliche Gruppe und (G_0, \dots, G_m) eine Normalreihe von G mit abelschen Faktoren. Dann gibt es eine Normalreihe (H_0, \dots, H_n) von G mit $\{G_0, \dots, G_m\} \subseteq \{H_0, \dots, H_n\}$, deren Faktoren H_k/H_{k+1} alle zyklisch von Primzahlordnung sind.

Satz. Sei G eine endliche Gruppe und (G_0, \dots, G_m) eine Normalreihe von G mit abelschen Faktoren. Dann gibt es eine Normalreihe (H_0, \dots, H_n) von G mit $\{G_0, \dots, G_m\} \subseteq \{H_0, \dots, H_n\}$, deren Faktoren H_k/H_{k+1} alle zyklisch von Primzahlordnung sind.

Beweis. $\exists G = G_0 \triangleright_{\neq} G_1 \triangleright_{\neq} \dots \triangleright_{\neq} G_m = \{1\}$.

Satz. Sei G eine endliche Gruppe und (G_0, \dots, G_m) eine Normalreihe von G mit abelschen Faktoren. Dann gibt es eine Normalreihe (H_0, \dots, H_n) von G mit $\{G_0, \dots, G_m\} \subseteq \{H_0, \dots, H_n\}$, deren Faktoren H_k/H_{k+1} alle zyklisch von Primzahlordnung sind.

Beweis. $\exists G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_m = \{1\}$.
 $\neq \quad \neq \quad \neq$

Sei $k \in \{0, \dots, m-1\}$ mit $\#(G_k/G_{k+1}) \notin \mathbb{P}$.

Satz. Sei G eine endliche Gruppe und (G_0, \dots, G_m) eine Normalreihe von G mit abelschen Faktoren. Dann gibt es eine Normalreihe (H_0, \dots, H_n) von G mit $\{G_0, \dots, G_n\} \subseteq \{H_0, \dots, H_m\}$, deren Faktoren H_k/H_{k+1} alle zyklisch von Primzahlordnung sind.

Beweis. $\exists G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_m = \{1\}$.

Sei $k \in \{0, \dots, m-1\}$ mit $\#(G_k/G_{k+1}) \notin \mathbb{P}$. Dann gibt es J mit

$$\{1\} < \underset{\text{echt}}{J} < \underset{\text{echt}}{G_k/G_{k+1}}.$$

Satz. Sei G eine endliche Gruppe und (G_0, \dots, G_m) eine Normalreihe von G mit **abelschen Faktoren**. Dann gibt es eine Normalreihe (H_0, \dots, H_n) von G mit $\{G_0, \dots, G_n\} \subseteq \{H_0, \dots, H_m\}$, deren Faktoren H_k/H_{k+1} alle **zyklisch von Primzahlordnung** sind.

Beweis. $\exists G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_m = \{1\}$.

Sei $k \in \{0, \dots, m-1\}$ mit $\#(G_k/G_{k+1}) \notin \mathbb{P}$. Dann gibt es J mit

$$\{1\} \triangleleft J \triangleleft G_k/G_{k+1}.$$

Für $I := \pi^{-1}(J)$ mit $\pi: G_k \rightarrow G_k/G_{k+1}$ kanonisch gilt dann

$$G_k \triangleright I \triangleright G_{k+1}.$$

Satz. Sei G eine endliche Gruppe und (G_0, \dots, G_m) eine Normalreihe von G mit **abelschen** Faktoren. Dann gibt es eine Normalreihe (H_0, \dots, H_n) von G mit $\{G_0, \dots, G_n\} \subseteq \{H_0, \dots, H_m\}$, deren Faktoren H_k/H_{k+1} alle **zyklisch von Primzahlordnung** sind.

Beweis. $\exists G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_m = \{1\}$.

Sei $k \in \{0, \dots, m-1\}$ mit $\#(G_k/G_{k+1}) \notin \mathbb{P}$. Dann gibt es J mit

$$\{1\} \triangleleft J \triangleleft G_k/G_{k+1}.$$

Für $I := \pi^{-1}(J)$ mit $\pi: G_k \rightarrow G_k/G_{k+1}$ kanonisch gilt dann

$$G_k \triangleright I \triangleright G_{k+1}.$$

Es ist I der Kern von $G_k \twoheadrightarrow G_k/G_{k+1} \twoheadrightarrow (G_k/G_{k+1})/J$ und daher

$G_k/I \cong \underbrace{(G_k/G_{k+1})/J}_{\text{abelsch}}$ **abelsch**.

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{abelsch}}$

Satz. Sei G eine endliche Gruppe und (G_0, \dots, G_m) eine Normalreihe von G mit **abelschen** Faktoren. Dann gibt es eine Normalreihe (H_0, \dots, H_n) von G mit $\{G_0, \dots, G_n\} \subseteq \{H_0, \dots, H_m\}$, deren Faktoren H_k/H_{k+1} alle **zyklisch von Primzahlordnung** sind.

Beweis. $\exists G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_m = \{1\}$.

Sei $k \in \{0, \dots, m-1\}$ mit $\#(G_k/G_{k+1}) \notin \mathbb{P}$. Dann gibt es J mit

$$\{1\} \triangleleft J \triangleleft G_k/G_{k+1}.$$

Für $I := \pi^{-1}(J)$ mit $\pi: G_k \rightarrow G_k/G_{k+1}$ kanonisch gilt dann

$$G_k \triangleright I \triangleright G_{k+1}.$$

Es ist I der Kern von $G_k \twoheadrightarrow G_k/G_{k+1} \twoheadrightarrow (G_k/G_{k+1})/J$ und daher $G_k/I \cong \underbrace{(G_k/G_{k+1})/J}_{\text{abelsch}}$. Weiter ist $I/G_{k+1} \leq \underbrace{G_k/G_{k+1}}_{\text{abelsch}}$ auch

abelsch.

Satz. Sei G eine endliche Gruppe und (G_0, \dots, G_m) eine Normalreihe von G mit **abelschen** Faktoren. Dann gibt es eine Normalreihe (H_0, \dots, H_n) von G mit $\{G_0, \dots, G_n\} \subseteq \{H_0, \dots, H_m\}$, deren Faktoren H_k/H_{k+1} alle **zyklisch von Primzahlordnung** sind.

Beweis. $\exists G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_m = \{1\}$.

Sei $k \in \{0, \dots, m-1\}$ mit $\#(G_k/G_{k+1}) \notin \mathbb{P}$. Dann gibt es J mit

$$\{1\} \triangleleft J \triangleleft G_k/G_{k+1}.$$

Für $I := \pi^{-1}(J)$ mit $\pi: G_k \rightarrow G_k/G_{k+1}$ kanonisch gilt dann

$$G_k \triangleright I \triangleright G_{k+1}.$$

Es ist I der Kern von $G_k \twoheadrightarrow G_k/G_{k+1} \twoheadrightarrow (G_k/G_{k+1})/J$ und daher $G_k/I \cong \underbrace{(G_k/G_{k+1})/J}_{\text{abelsch}}$. Weiter ist $I/G_{k+1} \leq \underbrace{G_k/G_{k+1}}_{\text{abelsch}}$ auch

abelsch. Mache nun so weiter...

