Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2015/2016

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 4 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Auf dem ganzen Blatt sei K ein Körper, C ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper und $\mathbb{A}^n := C^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 1. (5P) (Kreuzprodukt von irreduziblen Varietäten)

Beweise oder widerlege: Für jeden beliebigen Körper K und jeden beliebigen algebraisch abgeschlossenen Oberkörper C gilt: Seien $V \subseteq \mathbb{A}^m$ und $W \subseteq \mathbb{A}^n$ irreduzible affine K-Varietäten. Dann ist $V \times W \subseteq \mathbb{A}^{m+n}$ ebenfalls eine irreduzible affine K-Varietät.

Aufgabe 2. (5P) (Berechnungen zum Zariskiabschluss)

Berechne den $\mathbb{R}$-Zariskiabschluss in $\mathbb{C}^2$ der folgenden Mengen:

(a) $\{(n, 2^n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

(b) $\{(n, n^2) \mid n \in \mathbb{N}\}$

(c) $\left\{v \mid n \in \mathbb{N},\ v = \left(n, (\sqrt{2} + \frac{\mathring{\imath}}{\sqrt{2}})^n\right),\ \|v\| < 50\right\}$

Aufgabe 3. (2P) (Affine Varietäten sind quasikompakt)

Ist M eine Menge, so nennt man eine Menge $\mathscr{U}$ von Teilmengen von M mit $M = \bigcup \mathscr{U}$ eine *Überdeckung* von M. Ist dabei M sogar ein topologischer Raum und besteht $\mathscr{U}$ nur aus offenen Teilmengen von M, so nennt man $\mathscr{U}$ eine *offene Überdeckung* von M. Ein topologischer Raum heißt *quasikompakt*, wenn es für jede offene Überdeckung $\mathscr{U}$ eine endliche Überdeckung $\mathscr{U}' \subseteq \mathscr{U}$ von M gibt („endliche Teilüberdeckung"). Zeige, dass jeder noethersche topologische Raum quasikompakt ist.

Aufgabe 4. (4P) (Was ist $V(I : J)$?)

Überzeuge Dich davon, dass für alle Ideale I, J in einem kommutativen Ring A auch $I : J = \{a \in A \mid \forall b \in J : ab \in I\}$ wieder ein Ideal ist von A ist und zeige dann:

(a) Seien V und W K-Untervarietäten von $\mathbb{A}^n$. Dann ist $V = (V \cap W) \cup \overline{V \setminus W}$

(b) Für Ideale $I, J \subseteq K[\underline{X}]$ gilt $\overline{V(I) \setminus V(J)} \subseteq V(I : J) \subseteq V(I)$.

(c) Für Ideale $I, J \subseteq K[\underline{X}]$ gilt $V(I) = V(I + J) \cup V(I : J)$.

Abgabe bis Mittwoch, den 18. November 2015, 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.