

## §2.8 Endliche Varietäten

## Generalvoraussetzung

In diesem Abschnitt sei stets  $C|K$  eine Körpererweiterung,  
 $C$  algebraisch abgeschlossen und  $\leq$  eine Monomordnung auf  $[X]$ .

Satz. Sei  $I \subseteq K[X]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

(a)  $\#V(I) < \infty$

Satz. Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

(a)  $\#V(I) < \infty$

(b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$

Satz. Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

(a)  $\#V(I) < \infty$

(b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$

(c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$

Satz. Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$
- (e) Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K[\underline{X}]$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  ist maximal.

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$
- (e) Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K[\underline{X}]$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  ist maximal.
- (f) Es gibt keine irreduziblen affinen  $K$ -Untervarietäten  $V$  und  $W$  von  $V(I)$  mit  $V \subset W$ .

Satz. Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$
- (e) Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K[\underline{X}]$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  ist maximal.
- (f) Es gibt keine irreduziblen affinen  $K$ -Untervarietäten  $V$  und  $W$  von  $V(I)$  mit  $V \subset W$ .

Beweis. (a)  $\implies$  (b)  $\Leftrightarrow C = \overline{K}$ .

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$
- (e) Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K[\underline{X}]$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  ist maximal.
- (f) Es gibt keine irreduziblen affinen  $K$ -Untervarietäten  $V$  und  $W$  von  $V(I)$  mit  $V \subset W$ .

**Beweis.** (a)  $\implies$  (b)  $\text{ } \mathbb{C} \text{ } C = \overline{K}$ . Gelte nun (a) und sei  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Nach 2.7.2 definiert das Eliminationsideal  $I \cap K[X_i]$  dann eine endliche affine  $K$ -Varietät  $V(I \cap K[X_i])$  (denn der Zariski-Abschluss einer endlichen Menge in  $C$  ist endlich, da  $C$  algebraisch über  $K$  ist).

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$
- (e) Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K[\underline{X}]$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  ist maximal.
- (f) Es gibt keine irreduziblen affinen  $K$ -Untervarietäten  $V$  und  $W$  von  $V(I)$  mit  $V \subset W$ .

**Beweis.** (a)  $\implies$  (b)  $\text{ } \mathfrak{C} = \overline{K}$ . Gelte nun (a) und sei  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Nach 2.7.2 definiert das Eliminationsideal  $I \cap K[X_i]$  dann eine endliche affine  $K$ -Varietät  $V(I \cap K[X_i])$  (denn der Zariski-Abschluss einer endlichen Menge in  $C$  ist endlich, da  $C$  algebraisch über  $K$  ist).

Wäre  $I \cap K[X_i] = (0)$ , so wäre aber  $V(I \cap K[X_i]) = C$  unendlich, da  $C$  algebraisch abgeschlossen ist [ $\rightarrow$ 1.2.10].

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$
- (e) Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K[\underline{X}]$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  ist maximal.
- (f) Es gibt keine irreduziblen affinen  $K$ -Untervarietäten  $V$  und  $W$  von  $V(I)$  mit  $V \subset W$ .

**Beweis.** (b)  $\implies$  (c) ist trivial.

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$
- (e) Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K[\underline{X}]$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  ist maximal.
- (f) Es gibt keine irreduziblen affinen  $K$ -Untervarietäten  $V$  und  $W$  von  $V(I)$  mit  $V \subset W$ .

**Beweis.** (c)  $\implies$  (d) Gelte (c). Wähle eine Gröbnerbasis  $G$  von  $I$ . Nach 2.4.7(i) sind die  $K$ -Vektorräume  $\text{red}(G)$  und  $K[\underline{X}]/I$  isomorph.

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$
- (e) Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K[\underline{X}]$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  ist maximal.
- (f) Es gibt keine irreduziblen affinen  $K$ -Untervarietäten  $V$  und  $W$  von  $V(I)$  mit  $V \subset W$ .

**Beweis.** (c)  $\implies$  (d) Gelte (c). Wähle eine Gröbnerbasis  $G$  von  $I$ . Nach 2.4.7(i) sind die  $K$ -Vektorräume  $\text{red}(G)$  und  $K[\underline{X}]/I$  isomorph. Nach 2.4.11 ist

$$\text{redM}(G) = \{u \in [\underline{X}] \mid \nexists g \in G \setminus \{0\} : \text{LM}(g) \mid u\}$$

eine Basis von  $\text{red}(G)$ .

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$
- (e) Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K[\underline{X}]$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  ist maximal.
- (f) Es gibt keine irreduziblen affinen  $K$ -Untervarietäten  $V$  und  $W$  von  $V(I)$  mit  $V \subset W$ .

**Beweis.** (c)  $\implies$  (d) Gelte (c). Wähle eine Gröbnerbasis  $G$  von  $I$ . Nach 2.4.7(i) sind die  $K$ -Vektorräume  $\text{red}(G)$  und  $K[\underline{X}]/I$  isomorph. Nach 2.4.11 ist

$$\text{redM}(G) = \{u \in [\underline{X}] \mid \nexists g \in G \setminus \{0\} : \text{LM}(g) \mid u\}$$

eine Basis von  $\text{red}(G)$ . Also ist zu zeigen, dass  $\text{redM}(G)$  endlich ist.

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$
- (e) Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K[\underline{X}]$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  ist maximal.
- (f) Es gibt keine irreduziblen affinen  $K$ -Untervarietäten  $V$  und  $W$  von  $V(I)$  mit  $V \subset W$ .

**Beweis.** (c)  $\implies$  (d) Gelte (c). Wähle eine Gröbnerbasis  $G$  von  $I$ . Nach 2.4.7(i) sind die  $K$ -Vektorräume  $\text{red}(G)$  und  $K[\underline{X}]/I$  isomorph. Nach 2.4.11 ist

$$\text{redM}(G) = \{u \in [\underline{X}] \mid \nexists g \in G \setminus \{0\} : \text{LM}(g) \mid u\}$$

eine Basis von  $\text{red}(G)$ . Also ist zu zeigen, dass  $\text{redM}(G)$  endlich ist. Wegen  $L(I) = (\{\text{LM}(g) \mid g \in G \setminus \{0\}\})$  und (c) gibt es aber zu jedem  $i \in \{1, \dots, n\}$  ein  $g_i \in G \setminus \{0\}$  mit  $\text{LM}(g_i) \in [X_i]$ .

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$
- (e) Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K[\underline{X}]$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  ist maximal.
- (f) Es gibt keine irreduziblen affinen  $K$ -Untervarietäten  $V$  und  $W$  von  $V(I)$  mit  $V \subset W$ .

**Beweis.** (c)  $\implies$  (d) Gelte (c). Wähle eine Gröbnerbasis  $G$  von  $I$ . Nach 2.4.7(i) sind die  $K$ -Vektorräume  $\text{red}(G)$  und  $K[\underline{X}]/I$  isomorph. Nach 2.4.11 ist

$$\text{redM}(G) = \{u \in [\underline{X}] \mid \nexists g \in G \setminus \{0\} : \text{LM}(g) \mid u\}$$

eine Basis von  $\text{red}(G)$ . Also ist zu zeigen, dass  $\text{redM}(G)$  endlich ist. Wegen  $L(I) = (\{\text{LM}(g) \mid g \in G \setminus \{0\}\})$  und (c) gibt es aber zu jedem  $i \in \{1, \dots, n\}$  ein  $g_i \in G \setminus \{0\}$  mit  $\text{LM}(g_i) \in [X_i]$ .

Daraus sieht man leicht  $\#\text{redM}(G) < \infty$ .

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$
- (e) Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K[\underline{X}]$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  ist maximal.
- (f) Es gibt keine irreduziblen affinen  $K$ -Untervarietäten  $V$  und  $W$  von  $V(I)$  mit  $V \subset W$ .

**Beweis.** (d)  $\implies$  (e) Gelte (d) und sei  $\mathfrak{p} \subseteq K[\underline{X}]$  ein Primideal mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$ . Da wir einen  $K$ -Vektorraumepimorphismus  $K[\underline{X}]/I \rightarrow K[\underline{X}]/\mathfrak{p}$  haben, gilt auch  $\dim_K(K[\underline{X}]/\mathfrak{p}) < \infty$ .

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$
- (e) Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K[\underline{X}]$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  ist maximal.
- (f) Es gibt keine irreduziblen affinen  $K$ -Untervarietäten  $V$  und  $W$  von  $V(I)$  mit  $V \subset W$ .

**Beweis.** (d)  $\implies$  (e) Gelte (d) und sei  $\mathfrak{p} \subseteq K[\underline{X}]$  ein Primideal mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$ . Da wir einen  $K$ -Vektorraumepimorphismus  $K[\underline{X}]/I \rightarrow K[\underline{X}]/\mathfrak{p}$  haben, gilt auch  $\dim_K(K[\underline{X}]/\mathfrak{p}) < \infty$ . Sei nun  $\mathfrak{m} \subset K[\underline{X}]$  ein Ideal mit  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ .

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$
- (e) Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K[\underline{X}]$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  ist maximal.
- (f) Es gibt keine irreduziblen affinen  $K$ -Untervarietäten  $V$  und  $W$  von  $V(I)$  mit  $V \subset W$ .

**Beweis.** (d)  $\implies$  (e) Gelte (d) und sei  $\mathfrak{p} \subseteq K[\underline{X}]$  ein Primideal mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$ . Da wir einen  $K$ -Vektorraumepimorphismus  $K[\underline{X}]/I \rightarrow K[\underline{X}]/\mathfrak{p}$  haben, gilt auch  $\dim_K(K[\underline{X}]/\mathfrak{p}) < \infty$ . Sei nun  $\mathfrak{m} \subset K[\underline{X}]$  ein Ideal mit  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$ .

Zu zeigen:  $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ .

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$
- (e) Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K[\underline{X}]$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  ist maximal.
- (f) Es gibt keine irreduziblen affinen  $K$ -Untervarietäten  $V$  und  $W$  von  $V(I)$  mit  $V \subset W$ .

**Beweis.** (d)  $\implies$  (e) Gelte (d) und sei  $\mathfrak{p} \subseteq K[\underline{X}]$  ein Primideal mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$ . Da wir einen  $K$ -Vektorraumepimorphismus  $K[\underline{X}]/I \rightarrow K[\underline{X}]/\mathfrak{p}$  haben, gilt auch  $\dim_K(K[\underline{X}]/\mathfrak{p}) < \infty$ . Sei nun  $\mathfrak{m} \subset K[\underline{X}]$  ein Ideal mit  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$ .  
**Zu zeigen:**  $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ . Sei  $f \in \mathfrak{m}$ . Da die Potenzen  $\bar{f}^0, \bar{f}^1, \bar{f}^2, \dots$  linear abhängig in  $K[\underline{X}]/\mathfrak{p}$  sind, gibt es  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $a_0, \dots, a_{k-1} \in K$  mit  $f^k + a_{k-1}f^{k-1} + \dots + a_0 \in \mathfrak{p}$ . Dann  $k \geq 1$ , da  $1 \notin \mathfrak{p}$ .

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$
- (e) Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K[\underline{X}]$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  ist maximal.
- (f) Es gibt keine irreduziblen affinen  $K$ -Untervarietäten  $V$  und  $W$  von  $V(I)$  mit  $V \subset W$ .

**Beweis.** (d)  $\implies$  (e) Gelte (d) und sei  $\mathfrak{p} \subseteq K[\underline{X}]$  ein Primideal mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$ . Da wir einen  $K$ -Vektorraumepimorphismus  $K[\underline{X}]/I \rightarrow K[\underline{X}]/\mathfrak{p}$  haben, gilt auch  $\dim_K(K[\underline{X}]/\mathfrak{p}) < \infty$ . Sei nun  $\mathfrak{m} \subset K[\underline{X}]$  ein Ideal mit  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$ .

**Zu zeigen:**  $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ . Sei  $f \in \mathfrak{m}$ . Da die Potenzen  $\bar{f}^0, \bar{f}^1, \bar{f}^2, \dots$  linear abhängig in  $K[\underline{X}]/\mathfrak{p}$  sind, gibt es  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $a_0, \dots, a_{k-1} \in K$  mit  $f^k + a_{k-1}f^{k-1} + \dots + a_0 \in \mathfrak{p}$ . Dann  $k \geq 1$ , da  $1 \notin \mathfrak{p}$ . Falls  $k = 1$ , so  $f + a_0 \in \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$  und daher  $a_0 \in K \cap \mathfrak{m} = (0)$  und somit  $f \in \mathfrak{p}$ .

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$
- (e) Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K[\underline{X}]$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  ist maximal.
- (f) Es gibt keine irreduziblen affinen  $K$ -Untervarietäten  $V$  und  $W$  von  $V(I)$  mit  $V \subset W$ .

**Beweis.** (d)  $\implies$  (e) Gelte (d) und sei  $\mathfrak{p} \subseteq K[\underline{X}]$  ein Primideal mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$ . Da wir einen  $K$ -Vektorraumepimorphismus  $K[\underline{X}]/I \rightarrow K[\underline{X}]/\mathfrak{p}$  haben, gilt auch  $\dim_K(K[\underline{X}]/\mathfrak{p}) < \infty$ . Sei nun  $\mathfrak{m} \subset K[\underline{X}]$  ein Ideal mit  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$ .

**Zu zeigen:**  $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ . Sei  $f \in \mathfrak{m}$ . Da die Potenzen  $\bar{f}^0, \bar{f}^1, \bar{f}^2, \dots$  linear abhängig in  $K[\underline{X}]/\mathfrak{p}$  sind, gibt es  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $a_0, \dots, a_{k-1} \in K$  mit  $f^k + a_{k-1}f^{k-1} + \dots + a_0 \in \mathfrak{p}$ . Dann  $k \geq 1$ , da  $1 \notin \mathfrak{p}$ . Falls  $k = 1$ , so  $f + a_0 \in \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$  und daher  $a_0 \in K \cap \mathfrak{m} = (0)$  und somit  $f \in \mathfrak{p}$ . Falls  $k \geq 2$ , so ebenfalls  $a_0 \in K \cap \mathfrak{m} = (0)$  und somit  $f(f^{k-1} + \dots + a_1) \in \mathfrak{p}$ , woraus  $f \in \mathfrak{p}$  oder  $f^{k-1} + \dots + a_1 \in \mathfrak{p}$  folgt und so weiter...

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$
- (e) Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K[\underline{X}]$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  ist maximal.
- (f) Es gibt keine irreduziblen affinen  $K$ -Untervarietäten  $V$  und  $W$  von  $V(I)$  mit  $V \subset W$ .

**Beweis.** (e)  $\implies$  (f) Man kann (e) offensichtlich auch so formulieren: Es gibt keine Primideale  $\mathfrak{p}$  und  $\mathfrak{q}$  von  $K[\underline{X}]$  mit  $\sqrt{I} \subseteq \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ . Mit 1.3.10 und 1.4.22 entspricht dies genau (f).

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[X]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[X]/I) < \infty$
- (e) Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K[X]$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  ist maximal.
- (f) Es gibt keine irreduziblen affinen  $K$ -Untervarietäten  $V$  und  $W$  von  $V(I)$  mit  $V \subset W$ .

**Beweis.** (f)  $\implies$  (a) zeigen wir durch Kontraposition: Gelte  $\#V(I) = \infty$ . Da  $V(I)$  nur endlich viele irreduzible Komponenten hat, gibt es eine irreduzible affine  $K$ -Untervarietät  $W$  von  $V(I)$  mit  $\#W = \infty$ .

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[X]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[X]/I) < \infty$
- (e) Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K[X]$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  ist maximal.
- (f) Es gibt keine irreduziblen affinen  $K$ -Untervarietäten  $V$  und  $W$  von  $V(I)$  mit  $V \subset W$ .

**Beweis.** (f)  $\implies$  (a) zeigen wir durch Kontraposition: Gelte  $\#V(I) = \infty$ . Da  $V(I)$  nur endlich viele irreduzible Komponenten hat, gibt es eine irreduzible affine  $K$ -Untervarietät  $W$  von  $V(I)$  mit  $\#W = \infty$ . Dann muss die Projektion von  $W$  auf eine der Koordinatenachsen, ohne Einschränkung auf die letzte, auch unendlich sein, woraus  $I \cap K[X_n] = (0)$  folgt.

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[X]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[X]/I) < \infty$
- (e) Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K[X]$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  ist maximal.
- (f) Es gibt keine irreduziblen affinen  $K$ -Untervarietäten  $V$  und  $W$  von  $V(I)$  mit  $V \subset W$ .

**Beweis.** (f)  $\implies$  (a) zeigen wir durch Kontraposition: Gelte  $\#V(I) = \infty$ . Da  $V(I)$  nur endlich viele irreduzible Komponenten hat, gibt es eine irreduzible affine  $K$ -Untervarietät  $W$  von  $V(I)$  mit  $\#W = \infty$ . Dann muss die Projektion von  $W$  auf eine der Koordinatenachsen, ohne Einschränkung auf die letzte, auch unendlich sein, woraus  $I \cap K[X_n] = (0)$  folgt. Betrachtet man die Körpererweiterung  $\overline{K}|K$ , so folgt  $\pi(W \cap \overline{K}^n) \neq \emptyset$  mit  $\pi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}$ ,  $x \mapsto x_n$ .

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[X]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[X]/I) < \infty$
- (e) Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K[X]$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  ist maximal.
- (f) Es gibt keine irreduziblen affinen  $K$ -Untervarietäten  $V$  und  $W$  von  $V(I)$  mit  $V \subset W$ .

**Beweis.** (f)  $\implies$  (a) zeigen wir durch Kontraposition: Gelte  $\#V(I) = \infty$ . Da  $V(I)$  nur endlich viele irreduzible Komponenten hat, gibt es eine irreduzible affine  $K$ -Untervarietät  $W$  von  $V(I)$  mit  $\#W = \infty$ . Dann muss die Projektion von  $W$  auf eine der Koordinatenachsen, ohne Einschränkung auf die letzte, auch unendlich sein, woraus  $I \cap K[X_n] = (0)$  folgt. Betrachtet man die Körpererweiterung  $\overline{K}|K$ , so folgt  $\pi(W \cap \overline{K}^n) \neq \emptyset$  mit  $\pi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}$ ,  $x \mapsto x_n$ . Wähle nun  $a \in \pi(W \cap \overline{K}^n) \subseteq \overline{K}$ . Wähle  $f \in K[X_n] \setminus \{0\}$  mit  $f(a) = 0$ .

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[X]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[X]/I) < \infty$
- (e) Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K[X]$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  ist maximal.
- (f) Es gibt keine irreduziblen affinen  $K$ -Untervarietäten  $V$  und  $W$  von  $V(I)$  mit  $V \subset W$ .

**Beweis.** (f)  $\implies$  (a) zeigen wir durch Kontraposition: Gelte  $\#V(I) = \infty$ . Da  $V(I)$  nur endlich viele irreduzible Komponenten hat, gibt es eine irreduzible affine  $K$ -Untervarietät  $W$  von  $V(I)$  mit  $\#W = \infty$ . Dann muss die Projektion von  $W$  auf eine der Koordinatenachsen, ohne Einschränkung auf die letzte, auch unendlich sein, woraus  $I \cap K[X_n] = (0)$  folgt. Betrachtet man die Körpererweiterung  $\bar{K}|K$ , so folgt  $\pi(W \cap \bar{K}^n) \neq \emptyset$  mit  $\pi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}$ ,  $x \mapsto x_n$ . Wähle nun  $a \in \pi(W \cap \bar{K}^n) \subseteq \bar{K}$ . Wähle  $f \in K[X_n] \setminus \{0\}$  mit  $f(a) = 0$ . Dann ist  $W \cap V(f)$  eine nichtleere echte affine  $K$ -Untervarietät von  $W$  (nichtleer, da  $a \in \pi(W)$  und  $f(a) = 0$ , und echt, da  $\#\pi(W) = \infty$  und  $\#\pi(W \cap V(f)) < \infty$ ).

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[X]$  ein Ideal. Dann sind äquivalent:

- (a)  $\#V(I) < \infty$
- (b)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : I \cap K[X_i] \neq (0)$
- (c)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : L(I) \cap [X_i] \neq \emptyset$
- (d)  $\dim_K(K[X]/I) < \infty$
- (e) Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $K[X]$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  ist maximal.
- (f) Es gibt keine irreduziblen affinen  $K$ -Untervarietäten  $V$  und  $W$  von  $V(I)$  mit  $V \subset W$ .

**Beweis.** (f)  $\implies$  (a) zeigen wir durch Kontraposition: Gelte  $\#V(I) = \infty$ . Da  $V(I)$  nur endlich viele irreduzible Komponenten hat, gibt es eine irreduzible affine  $K$ -Untervarietät  $W$  von  $V(I)$  mit  $\#W = \infty$ . Dann muss die Projektion von  $W$  auf eine der Koordinatenachsen, ohne Einschränkung auf die letzte, auch unendlich sein, woraus  $I \cap K[X_n] = (0)$  folgt. Betrachtet man die Körpererweiterung  $\bar{K}|K$ , so folgt  $\pi(W \cap \bar{K}^n) \neq \emptyset$  mit  $\pi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}$ ,  $x \mapsto x_n$ . Wähle nun  $a \in \pi(W \cap \bar{K}^n) \subseteq \bar{K}$ . Wähle  $f \in K[X_n] \setminus \{0\}$  mit  $f(a) = 0$ . Dann ist  $W \cap V(f)$  eine nichtleere echte affine  $K$ -Untervarietät von  $W$  (nichtleer, da  $a \in \pi(W)$  und  $f(a) = 0$ , und echt, da  $\#\pi(W) = \infty$  und  $\#\pi(W \cap V(f)) < \infty$ ). Wähle nun eine irreduzible Komponente  $V$  von  $W \cap V(f)$ . Dann  $V \subset W \subseteq V(f)$ .  $\square$

## Endlichkeit entscheiden

**Korollar.** Sei  $G$  eine Gröbnerbasis des Ideals  $I \subseteq K[X]$ . Dann gilt **genau dann**  $\#V(I) < \infty$ , wenn es für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  ein  $g \in G \setminus \{0\}$  gibt mit  $\text{LM}(g) \in [X_i]$ .

**Beweis.**

Benutze 2.8.1 und 2.4.2(j).



# Erinnerung

- Ist  $f \in C[X]$  und  $a \in C$ , so heißt  $a$  eine **mehrfache Nullstelle** von  $f$ , wenn  $(X - a)^2 \mid f$  in  $C[X]$  oder **äquivalent**, wenn  $f(a) = f'(a) = 0$ .

# Erinnerung

- Ist  $f \in C[X]$  und  $a \in C$ , so heißt  $a$  eine **mehrfache Nullstelle** von  $f$ , wenn  $(X - a)^2 \mid f$  in  $C[X]$  oder **äquivalent**, wenn  $f(a) = f'(a) = 0$ .
- Ein Polynom  $f \in C[X]$  heißt **separabel**, wenn  $f$  in  $C$  keine mehrfachen Nullstellen hat oder **äquivalent**, wenn  $V(f, f') = \emptyset$ .  
Ist also  $f \in K[X]$ , so ist  $f$  separabel genau dann, wenn  $(f, f') = (1) = K[X]$ .

# Erinnerung

- Ist  $f \in C[X]$  und  $a \in C$ , so heißt  $a$  eine **mehrfache Nullstelle** von  $f$ , wenn  $(X - a)^2 \mid f$  in  $C[X]$  oder **äquivalent**, wenn  $f(a) = f'(a) = 0$ .
- Ein Polynom  $f \in C[X]$  heißt **separabel**, wenn  $f$  in  $C$  keine mehrfachen Nullstellen hat oder **äquivalent**, wenn  $V(f, f') = \emptyset$ .  
Ist also  $f \in K[X]$ , so ist  $f$  separabel genau dann, wenn  $(f, f') = (1) = K[X]$ .
- Man nennt  $K$  **vollkommen**, wenn jedes irreduzible Polynom in  $K[X]$  separabel ist. Körper der Charakteristik 0, endliche Körper und algebraisch abgeschlossene Körper sind vollkommen.

# Übung

Seien  $A$  ein faktorieller Ring,  $s \in \mathbb{N}_0$ ,  $p_1, \dots, p_s$  paarweise nicht assoziierte irreduzible Elemente von  $A$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{N}$ .

Dann ist das Hauptideal  $(p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s})$  genau dann ein Radikalideal, wenn  $\alpha_1 = \dots = \alpha_s = 1$ .

**Lemma.** Sei  $f \in K[X]$  und  $I := (f) \subseteq K[X]$ .

(a) Ist  $f$  separabel, so ist  $I$  ein Radikalideal.

(b) Ist  $K$  vollkommen und  $I$  ein Radikalideal, so ist  $f$  separabel.

**Beweis.**

(a) folgt sofort aus der Übung, ebenso (b), wenn man noch berücksichtigt, dass zwei nicht assoziierte irreduzible Polynome in  $K[X]$  keine gemeinsame Nullstelle in  $C$  haben können.  $\square$

## Beispiel

Nimmt man  $K := \mathbb{F}_p(T)$  für eine Primzahl  $p$ , so ist  $X^p - T$  nach dem Kriterium von Eisenstein prim und daher  $(X^p - T) \subseteq K[X]$  ein Primideal und insbesondere ein **Radikalideal**.

Aber  $X^p - T$  ist **nicht separabel**, denn ist  $a \in \overline{K}$  mit  $a^p - T = 0$ , so  $X^p - T = (X - a)^p$ .

**Lemma.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal,  $s \in \mathbb{N}$  und  $p_1, \dots, p_s \in K[X_1]$  mit  $(p_i, p_j) = (1) = K[X_1]$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, s\}$  mit  $i \neq j$ . Dann

$$(I \cup \{p_1 \cdots p_s\}) = \bigcap_{i=1}^s (I \cup \{p_i\}).$$

**Lemma.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal,  $s \in \mathbb{N}$  und  $p_1, \dots, p_s \in K[X_1]$  mit  $(p_i, p_j) = (1) = K[X_1]$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, s\}$  mit  $i \neq j$ . Dann

$$(I \cup \{p_1 \cdots p_s\}) = \bigcap_{i=1}^s (I \cup \{p_i\}).$$

**Beweis.** „ $\subseteq$ “ ist trivial

**Lemma.** Sei  $I \subseteq K[X]$  ein Ideal,  $s \in \mathbb{N}$  und  $p_1, \dots, p_s \in K[X_1]$  mit  $(p_i, p_j) = (1) = K[X_1]$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, s\}$  mit  $i \neq j$ . Dann

$$(I \cup \{p_1 \cdots p_s\}) = \bigcap_{i=1}^s (I \cup \{p_i\}).$$

**Beweis.** „ $\subseteq$ “ ist trivial

„ $\supseteq$ “ Sei  $g \in \bigcap_{i=1}^s (I \cup \{p_i\})$ . **Zu zeigen:**  $g \in (I \cup \{p_1 \cdots p_s\})$ .

**Lemma.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal,  $s \in \mathbb{N}$  und  $p_1, \dots, p_s \in K[X_1]$  mit  $(p_i, p_j) = (1) = K[X_1]$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, s\}$  mit  $i \neq j$ . Dann

$$(I \cup \{p_1 \cdots p_s\}) = \bigcap_{i=1}^s (I \cup \{p_i\}).$$

**Beweis.** „ $\subseteq$ “ ist trivial

„ $\supseteq$ “ Sei  $g \in \bigcap_{i=1}^s (I \cup \{p_i\})$ . **Zu zeigen:**  $g \in (I \cup \{p_1 \cdots p_s\})$ .

Wähle  $q_i \in I$  und  $r_i \in K[\underline{X}]$  mit  $g = q_i + r_i p_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ).

**Lemma.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal,  $s \in \mathbb{N}$  und  $p_1, \dots, p_s \in K[X_1]$  mit  $(p_i, p_j) = (1) = K[X_1]$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, s\}$  mit  $i \neq j$ . Dann

$$(I \cup \{p_1 \cdots p_s\}) = \bigcap_{i=1}^s (I \cup \{p_i\}).$$

**Beweis.** „ $\subseteq$ “ ist trivial

„ $\supseteq$ “ Sei  $g \in \bigcap_{i=1}^s (I \cup \{p_i\})$ . **Zu zeigen:**  $g \in (I \cup \{p_1 \cdots p_s\})$ .

Wähle  $q_i \in I$  und  $r_i \in K[\underline{X}]$  mit  $g = q_i + r_i p_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ). Für

$$f_i := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s p_j$$

gilt  $f_i g \in (I \cup \{p_1 \cdots p_s\})$ .

**Lemma.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal,  $s \in \mathbb{N}$  und  $p_1, \dots, p_s \in K[X_1]$  mit  $(p_i, p_j) = (1) = K[X_1]$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, s\}$  mit  $i \neq j$ . Dann

$$(I \cup \{p_1 \cdots p_s\}) = \bigcap_{i=1}^s (I \cup \{p_i\}).$$

**Beweis.** „ $\subseteq$ “ ist trivial

„ $\supseteq$ “ Sei  $g \in \bigcap_{i=1}^s (I \cup \{p_i\})$ . **Zu zeigen:**  $g \in (I \cup \{p_1 \cdots p_s\})$ .

Wähle  $q_i \in I$  und  $r_i \in K[\underline{X}]$  mit  $g = q_i + r_i p_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ). Für

$$f_i := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s p_j$$

gilt  $f_i g \in (I \cup \{p_1 \cdots p_s\})$ . Da  $K[X_1]$  ein Hauptidealring ist, gilt ausserdem

$$(f_1, \dots, f_s) = (1) = K[X_1].$$

**Lemma.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal,  $s \in \mathbb{N}$  und  $p_1, \dots, p_s \in K[X_1]$  mit  $(p_i, p_j) = (1) = K[X_1]$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, s\}$  mit  $i \neq j$ . Dann

$$(I \cup \{p_1 \cdots p_s\}) = \bigcap_{i=1}^s (I \cup \{p_i\}).$$

**Beweis.** „ $\subseteq$ “ ist trivial

„ $\supseteq$ “ Sei  $g \in \bigcap_{i=1}^s (I \cup \{p_i\})$ . **Zu zeigen:**  $g \in (I \cup \{p_1 \cdots p_s\})$ .

Wähle  $q_i \in I$  und  $r_i \in K[\underline{X}]$  mit  $g = q_i + r_i p_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ). Für

$$f_i := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s p_j$$

gilt  $f_i g \in (I \cup \{p_1 \cdots p_s\})$ . Da  $K[X_1]$  ein Hauptidealring ist, gilt ausserdem

$$(f_1, \dots, f_s) = (1) = K[X_1].$$

Daher gibt es  $h_1, \dots, h_s \in K[X_1]$  mit  $h_1 f_1 + \cdots + h_s f_s = 1$ .

**Lemma.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal,  $s \in \mathbb{N}$  und  $p_1, \dots, p_s \in K[X_1]$  mit  $(p_i, p_j) = (1) = K[X_1]$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, s\}$  mit  $i \neq j$ . Dann

$$(I \cup \{p_1 \cdots p_s\}) = \bigcap_{i=1}^s (I \cup \{p_i\}).$$

**Beweis.** „ $\subseteq$ “ ist trivial

„ $\supseteq$ “ Sei  $g \in \bigcap_{i=1}^s (I \cup \{p_i\})$ . **Zu zeigen:**  $g \in (I \cup \{p_1 \cdots p_s\})$ .

Wähle  $q_i \in I$  und  $r_i \in K[\underline{X}]$  mit  $g = q_i + r_i p_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ). Für

$$f_i := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s p_j$$

gilt  $f_i g \in (I \cup \{p_1 \cdots p_s\})$ . Da  $K[X_1]$  ein Hauptidealring ist, gilt ausserdem

$$(f_1, \dots, f_s) = (1) = K[X_1].$$

Daher gibt es  $h_1, \dots, h_s \in K[X_1]$  mit  $h_1 f_1 + \cdots + h_s f_s = 1$ . Es folgt

$$g = 1g = (h_1 f_1 + \cdots + h_s f_s)g = h_1(f_1 g) + \cdots + h_s(f_s g) \in (I \cup \{p_1 \cdots p_s\}).$$



**Satz.** [Abraham Seidenberg \*1916 †1988] Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal.  
Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  enthalte das Eliminationsideal  $I \cap K[X_i]$  ein separables Polynom. **Dann ist  $I$  ein Radikalideal.**

**Beweis.** Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Satz.** [Abraham Seidenberg \*1916 †1988] Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal.  
Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  enthalte das Eliminationsideal  $I \cap K[X_i]$  ein  
separables Polynom. **Dann ist  $I$  ein Radikalideal.**

**Beweis.** Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ .

$n = 0$  trivial

**Satz.** [Abraham Seidenberg \*1916 †1988] Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  enthalte das Eliminationsideal  $I \cap K[X_i]$  ein separables Polynom. **Dann ist  $I$  ein Radikalideal.**

**Beweis.** Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ .

$n = 1$  folgt aus dem vorletzten Lemma.

**Satz.** [Abraham Seidenberg \*1916 †1988] Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal.  
Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  enthalte das Eliminationsideal  $I \cap K[X_i]$  ein separables Polynom. **Dann ist  $I$  ein Radikalideal.**

**Beweis.** Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ .

$n - 1 \rightarrow n \quad (n \geq 2)$

**Satz.** [Abraham Seidenberg \*1916 †1988] Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal.  
Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  enthalte das Eliminationsideal  $I \cap K[X_i]$  ein separables Polynom. **Dann ist  $I$  ein Radikalideal.**

**Beweis.** Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ .

$n - 1 \rightarrow n$  ( $n \geq 2$ ) Wähle  $f \in I \cap K[X_1]$  separabel.  $\exists f \in K[X_1] \setminus K$ .

**Satz.** [Abraham Seidenberg \*1916 †1988] Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal.  
Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  enthalte das Eliminationsideal  $I \cap K[X_i]$  ein separables Polynom. **Dann ist  $I$  ein Radikalideal.**

**Beweis.** Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ .

$n - 1 \rightarrow n$  ( $n \geq 2$ ) Wähle  $f \in I \cap K[X_1]$  separabel.  $\exists f \in K[X_1] \setminus K$ .

Schreibe dann  $f = p_1 \cdots p_s$  mit  $s \in \mathbb{N}$ ,  $p_1, \dots, p_s \in K[X_1]$  irreduzibel und  $(p_i, p_j) = (1)$  für  $i \neq j$ .

**Satz.** [Abraham Seidenberg \*1916 †1988] Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  enthalte das Eliminationsideal  $I \cap K[X_i]$  ein separables Polynom. **Dann ist  $I$  ein Radikalideal.**

**Beweis.** Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ .

$n - 1 \rightarrow n$  ( $n \geq 2$ ) Wähle  $f \in I \cap K[X_1]$  separabel.  $\exists f \in K[X_1] \setminus K$ .

Schreibe dann  $f = p_1 \cdots p_s$  mit  $s \in \mathbb{N}$ ,  $p_1, \dots, p_s \in K[X_1]$  irreduzibel und  $(p_i, p_j) = (1)$  für  $i \neq j$ . Nach dem letzten Lemma dann

$$I = \bigcap_{i=1}^s (I \cup \{p_i\}).$$

**Satz.** [Abraham Seidenberg \*1916 †1988] Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  enthalte das Eliminationsideal  $I \cap K[X_i]$  ein separables Polynom. **Dann ist  $I$  ein Radikalideal.**

**Beweis.** Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ .

$n - 1 \rightarrow n$  ( $n \geq 2$ ) Wähle  $f \in I \cap K[X_1]$  separabel.  $\exists f \in K[X_1] \setminus K$ .

Schreibe dann  $f = p_1 \cdots p_s$  mit  $s \in \mathbb{N}$ ,  $p_1, \dots, p_s \in K[X_1]$  irreduzibel und  $(p_i, p_j) = (1)$  für  $i \neq j$ . Nach dem letzten Lemma dann

$I = \bigcap_{i=1}^s (I \cup \{p_i\})$ . Da ein Schnitt von Radikalidealen wieder ein Radikalideal ist, können wir daher  $\exists f$  als irreduzibel in  $K[X_1]$  voraussetzen.

**Satz.** [Abraham Seidenberg \*1916 †1988] Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  enthalte das Eliminationsideal  $I \cap K[X_i]$  ein separables Polynom. **Dann ist  $I$  ein Radikalideal.**

**Beweis.** Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ .

$n - 1 \rightarrow n$  ( $n \geq 2$ ) Wähle  $f \in I \cap K[X_1]$  separabel.  $\exists f \in K[X_1] \setminus K$ .

Schreibe dann  $f = p_1 \cdots p_s$  mit  $s \in \mathbb{N}$ ,  $p_1, \dots, p_s \in K[X_1]$  irreduzibel und  $(p_i, p_j) = (1)$  für  $i \neq j$ . Nach dem letzten Lemma dann

$I = \bigcap_{i=1}^s (I \cup \{p_i\})$ . Da ein Schnitt von Radikalidealen wieder ein Radikalideal ist, können wir daher  $\exists f$  als irreduzibel in  $K[X_1]$

voraussetzen. **Wähle eine Nullstelle  $a \in C$  mit  $f(a) = 0$** , setze

$L := K(a)$  und betrachte den  $K$ -Algebrenepimorphismus

$\varphi: K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow L[X_2, \dots, X_n]$  mit  $\varphi(X_1) = a$  und  $\varphi(X_i) = X_i$  für  $i \in \{2, \dots, n\}$ .

**Satz.** [Abraham Seidenberg \*1916 †1988] Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  enthalte das Eliminationsideal  $I \cap K[X_i]$  ein separables Polynom. **Dann ist  $I$  ein Radikalideal.**

**Beweis.** Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ .

$n - 1 \rightarrow n$  ( $n \geq 2$ ) Wähle  $f \in I \cap K[X_1]$  separabel.  $\exists f \in K[X_1] \setminus K$ .

Schreibe dann  $f = p_1 \cdots p_s$  mit  $s \in \mathbb{N}$ ,  $p_1, \dots, p_s \in K[X_1]$  irreduzibel und  $(p_i, p_j) = (1)$  für  $i \neq j$ . Nach dem letzten Lemma dann

$I = \bigcap_{i=1}^s (I \cup \{p_i\})$ . Da ein Schnitt von Radikalidealen wieder ein Radikalideal ist, können wir daher  $\exists f$  als irreduzibel in  $K[X_1]$

voraussetzen. **Wähle eine Nullstelle  $a \in C$  mit  $f(a) = 0$** , setze

$L := K(a)$  und betrachte den  $K$ -Algebrenepimorphismus

$\varphi: K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow L[X_2, \dots, X_n]$  mit  $\varphi(X_1) = a$  und  $\varphi(X_i) = X_i$  für  $i \in \{2, \dots, n\}$ . Man sieht dann leicht, dass der Kern von  $\varphi$  von  $f$

erzeugt wird, denn  $f$  ist assoziiert zum Minimalpolynom von  $a$  über  $K$ .

**Satz.** [Abraham Seidenberg \*1916 †1988] Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  enthalte das Eliminationsideal  $I \cap K[X_i]$  ein separables Polynom. **Dann ist  $I$  ein Radikalideal.**

**Beweis.** Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ .

$n - 1 \rightarrow n$  ( $n \geq 2$ ) Wähle  $f \in I \cap K[X_1]$  separabel.  $\exists f \in K[X_1] \setminus K$ .

Schreibe dann  $f = p_1 \cdots p_s$  mit  $s \in \mathbb{N}$ ,  $p_1, \dots, p_s \in K[X_1]$  irreduzibel und  $(p_i, p_j) = (1)$  für  $i \neq j$ . Nach dem letzten Lemma dann

$I = \bigcap_{i=1}^s (I \cup \{p_i\})$ . Da ein Schnitt von Radikalidealen wieder ein Radikalideal ist, können wir daher  $\exists f$  als irreduzibel in  $K[X_1]$

voraussetzen. **Wähle eine Nullstelle  $a \in C$  mit  $f(a) = 0$** , setze

$L := K(a)$  und betrachte den  $K$ -Algebrenepimorphismus

$\varphi: K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow L[X_2, \dots, X_n]$  mit  $\varphi(X_1) = a$  und  $\varphi(X_i) = X_i$  für  $i \in \{2, \dots, n\}$ . Man sieht dann leicht, dass der Kern von  $\varphi$  von  $f$

erzeugt wird, denn  $f$  ist assoziiert zum Minimalpolynom von  $a$  über  $K$ .

Insbesondere gilt  $\ker \varphi \subseteq I$ .

**Satz.** [Abraham Seidenberg \*1916 †1988] Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  enthalte das Eliminationsideal  $I \cap K[X_i]$  ein separables Polynom. **Dann ist  $I$  ein Radikalideal.**

**Beweis.** Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ .

$n - 1 \rightarrow n$  ( $n \geq 2$ ) Wähle  $f \in I \cap K[X_1]$  separabel.  $\exists f \in K[X_1] \setminus K$ .

Schreibe dann  $f = p_1 \cdots p_s$  mit  $s \in \mathbb{N}$ ,  $p_1, \dots, p_s \in K[X_1]$  irreduzibel und  $(p_i, p_j) = (1)$  für  $i \neq j$ . Nach dem letzten Lemma dann

$I = \bigcap_{i=1}^s (I \cup \{p_i\})$ . Da ein Schnitt von Radikalidealen wieder ein Radikalideal ist, können wir daher  $\exists f$  als irreduzibel in  $K[X_1]$

voraussetzen. **Wähle eine Nullstelle  $a \in C$  mit  $f(a) = 0$** , setze

$L := K(a)$  und betrachte den  $K$ -Algebrenepimorphismus

$\varphi: K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow L[X_2, \dots, X_n]$  mit  $\varphi(X_1) = a$  und  $\varphi(X_i) = X_i$  für  $i \in \{2, \dots, n\}$ . Man sieht dann leicht, dass der Kern von  $\varphi$  von  $f$

erzeugt wird, denn  $f$  ist assoziiert zum Minimalpolynom von  $a$  über  $K$ .

Insbesondere gilt  $\ker \varphi \subseteq I$ . Da  $\varphi$  wegen  $L = K[a]$  surjektiv ist, ist

$J := \varphi(I)$  ein Ideal in  $L[X_2, \dots, X_n]$ .

**Satz.** [Abraham Seidenberg \*1916 †1988] Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  enthalte das Eliminationsideal  $I \cap K[X_i]$  ein separables Polynom. **Dann ist  $I$  ein Radikalideal.**

**Beweis.** Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ .

$n - 1 \rightarrow n$  ( $n \geq 2$ ) Wähle  $f \in I \cap K[X_1]$  separabel.  $\exists f \in K[X_1] \setminus K$ .

Schreibe dann  $f = p_1 \cdots p_s$  mit  $s \in \mathbb{N}$ ,  $p_1, \dots, p_s \in K[X_1]$  irreduzibel und  $(p_i, p_j) = (1)$  für  $i \neq j$ . Nach dem letzten Lemma dann

$I = \bigcap_{i=1}^s (I \cup \{p_i\})$ . Da ein Schnitt von Radikalidealen wieder ein Radikalideal ist, können wir daher  $\exists f$  als irreduzibel in  $K[X_1]$

voraussetzen. **Wähle eine Nullstelle  $a \in C$  mit  $f(a) = 0$** , setze

$L := K(a)$  und betrachte den  $K$ -Algebrenepimorphismus

$\varphi: K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow L[X_2, \dots, X_n]$  mit  $\varphi(X_1) = a$  und  $\varphi(X_i) = X_i$  für  $i \in \{2, \dots, n\}$ . Man sieht dann leicht, dass der Kern von  $\varphi$  von  $f$

erzeugt wird, denn  $f$  ist assoziiert zum Minimalpolynom von  $a$  über  $K$ .

Insbesondere gilt  $\ker \varphi \subseteq I$ . Da  $\varphi$  wegen  $L = K[a]$  surjektiv ist, ist

$J := \varphi(I)$  ein Ideal in  $L[X_2, \dots, X_n]$ . Wegen  $\ker \varphi \subseteq I$  gilt  $\varphi^{-1}(J) = I$ .

**Satz.** [Abraham Seidenberg \*1916 †1988] Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  enthalte das Eliminationsideal  $I \cap K[X_i]$  ein separables Polynom. **Dann ist  $I$  ein Radikalideal.**

**Beweis.** Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ .

$n - 1 \rightarrow n$  ( $n \geq 2$ ) Wähle  $f \in I \cap K[X_1]$  separabel.  $\exists f \in K[X_1] \setminus K$ .

Schreibe dann  $f = p_1 \cdots p_s$  mit  $s \in \mathbb{N}$ ,  $p_1, \dots, p_s \in K[X_1]$  irreduzibel und  $(p_i, p_j) = (1)$  für  $i \neq j$ . Nach dem letzten Lemma dann

$I = \bigcap_{i=1}^s (I \cup \{p_i\})$ . Da ein Schnitt von Radikalidealen wieder ein Radikalideal ist, können wir daher  $\exists f$  als irreduzibel in  $K[X_1]$

voraussetzen. **Wähle eine Nullstelle  $a \in C$  mit  $f(a) = 0$** , setze

$L := K(a)$  und betrachte den  $K$ -Algebrenepimorphismus

$\varphi: K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow L[X_2, \dots, X_n]$  mit  $\varphi(X_1) = a$  und  $\varphi(X_i) = X_i$  für  $i \in \{2, \dots, n\}$ . Man sieht dann leicht, dass der Kern von  $\varphi$  von  $f$

erzeugt wird, denn  $f$  ist assoziiert zum Minimalpolynom von  $a$  über  $K$ .

Insbesondere gilt  $\ker \varphi \subseteq I$ . Da  $\varphi$  wegen  $L = K[a]$  surjektiv ist, ist

$J := \varphi(I)$  ein Ideal in  $L[X_2, \dots, X_n]$ . Wegen  $\ker \varphi \subseteq I$  gilt  $\varphi^{-1}(J) = I$ .

**Daher reicht es zu zeigen, dass  $J$  ein Radikalideal ist.**

**Satz.** [Abraham Seidenberg \*1916 †1988] Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  enthalte das Eliminationsideal  $I \cap K[X_i]$  ein separables Polynom. **Dann ist  $I$  ein Radikalideal.**

**Beweis.** Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ .

$n - 1 \rightarrow n$  ( $n \geq 2$ ) Wähle  $f \in I \cap K[X_1]$  separabel.  $\exists f \in K[X_1] \setminus K$ .

Schreibe dann  $f = p_1 \cdots p_s$  mit  $s \in \mathbb{N}$ ,  $p_1, \dots, p_s \in K[X_1]$  irreduzibel und  $(p_i, p_j) = (1)$  für  $i \neq j$ . Nach dem letzten Lemma dann

$I = \bigcap_{i=1}^s (I \cup \{p_i\})$ . Da ein Schnitt von Radikalidealen wieder ein Radikalideal ist, können wir daher  $\exists f$  als irreduzibel in  $K[X_1]$

voraussetzen. **Wähle eine Nullstelle  $a \in C$  mit  $f(a) = 0$** , setze

$L := K(a)$  und betrachte den  $K$ -Algebrenepimorphismus

$\varphi: K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow L[X_2, \dots, X_n]$  mit  $\varphi(X_1) = a$  und  $\varphi(X_i) = X_i$  für  $i \in \{2, \dots, n\}$ . Man sieht dann leicht, dass der Kern von  $\varphi$  von  $f$

erzeugt wird, denn  $f$  ist assoziiert zum Minimalpolynom von  $a$  über  $K$ .

Insbesondere gilt  $\ker \varphi \subseteq I$ . Da  $\varphi$  wegen  $L = K[a]$  surjektiv ist, ist

$J := \varphi(I)$  ein Ideal in  $L[X_2, \dots, X_n]$ . Wegen  $\ker \varphi \subseteq I$  gilt  $\varphi^{-1}(J) = I$ .

**Daher reicht es zu zeigen, dass  $J$  ein Radikalideal ist.** Für jedes

$i \in \{2, \dots, n\}$  enthält aber mit  $I \cap K[X_i]$  auch  $J \supseteq I \cap K[X_i]$  ein separables Polynom.

**Satz.** [Abraham Seidenberg \*1916 †1988] Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal. Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  enthalte das Eliminationsideal  $I \cap K[X_i]$  ein separables Polynom. **Dann ist  $I$  ein Radikalideal.**

**Beweis.** Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ .

$n - 1 \rightarrow n$  ( $n \geq 2$ ) Wähle  $f \in I \cap K[X_1]$  separabel.  $\exists f \in K[X_1] \setminus K$ .

Schreibe dann  $f = p_1 \cdots p_s$  mit  $s \in \mathbb{N}$ ,  $p_1, \dots, p_s \in K[X_1]$  irreduzibel und  $(p_i, p_j) = (1)$  für  $i \neq j$ . Nach dem letzten Lemma dann

$I = \bigcap_{i=1}^s (I \cup \{p_i\})$ . Da ein Schnitt von Radikalidealen wieder ein Radikalideal ist, können wir daher  $\exists f$  als irreduzibel in  $K[X_1]$

voraussetzen. **Wähle eine Nullstelle  $a \in C$  mit  $f(a) = 0$** , setze

$L := K(a)$  und betrachte den  $K$ -Algebrenepimorphismus

$\varphi: K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow L[X_2, \dots, X_n]$  mit  $\varphi(X_1) = a$  und  $\varphi(X_i) = X_i$  für  $i \in \{2, \dots, n\}$ . Man sieht dann leicht, dass der Kern von  $\varphi$  von  $f$

erzeugt wird, denn  $f$  ist assoziiert zum Minimalpolynom von  $a$  über  $K$ .

Insbesondere gilt  $\ker \varphi \subseteq I$ . Da  $\varphi$  wegen  $L = K[a]$  surjektiv ist, ist

$J := \varphi(I)$  ein Ideal in  $L[X_2, \dots, X_n]$ . Wegen  $\ker \varphi \subseteq I$  gilt  $\varphi^{-1}(J) = I$ .

**Daher reicht es zu zeigen, dass  $J$  ein Radikalideal ist.** Für jedes

$i \in \{2, \dots, n\}$  enthält aber mit  $I \cap K[X_i]$  auch  $J \supseteq I \cap K[X_i]$  ein

separables Polynom. **Nach IV ist also  $J$  ein Radikalideal.** □

Korollar. Sei  $K$  ein vollkommener Körper und  $I \subseteq K[X]$  ein Ideal.

Dann sind äquivalent:

(a)  $I$  ist ein Radikalideal mit  $\#V(I) < \infty$ .

**Korollar.** Sei  $K$  ein vollkommener Körper und  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal.

Dann sind äquivalent:

- (a)  $I$  ist ein Radikalideal mit  $\#V(I) < \infty$ .
- (b) Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  enthält  $I \cap K[X_i]$  ein separables Polynom.

**Korollar.** Sei  $K$  ein **vollkommener** Körper und  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal.

**Dann sind äquivalent:**

- (a)  $I$  ist ein Radikalideal mit  $\#V(I) < \infty$ .
- (b) Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  enthält  $I \cap K[X_i]$  ein separables Polynom.
- (c) Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  wird das Eliminationsideal  $I \cap K[X_i]$  von einem separablen Polynom erzeugt.

**Korollar.** Sei  $K$  ein **vollkommener** Körper und  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal.

**Dann sind äquivalent:**

- (a)  $I$  ist ein Radikalideal mit  $\#V(I) < \infty$ .
- (b) Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  enthält  $I \cap K[X_i]$  ein separables Polynom.
- (c) Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  wird das Eliminationsideal  $I \cap K[X_i]$  von einem separablen Polynom erzeugt.

**Beweis.**

(c)  $\implies$  (b) ist trivial.

**Korollar.** Sei  $K$  ein vollkommener Körper und  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal.

Dann sind äquivalent:

- (a)  $I$  ist ein Radikalideal mit  $\#V(I) < \infty$ .
- (b) Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  enthält  $I \cap K[X_i]$  ein separables Polynom.
- (c) Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  wird das Eliminationsideal  $I \cap K[X_i]$  von einem separablen Polynom erzeugt.

**Beweis.**

(c)  $\implies$  (b) ist trivial.

(b)  $\implies$  (a) folgt aus dem gerade bewiesenen Satz von Seidenberg und dem ersten Satz dieses Abschnitts.

**Korollar.** Sei  $K$  ein **vollkommener** Körper und  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal.

**Dann sind äquivalent:**

- (a)  $I$  ist ein Radikalideal mit  $\#V(I) < \infty$ .
- (b) Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  enthält  $I \cap K[X_i]$  ein separables Polynom.
- (c) Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  wird das Eliminationsideal  $I \cap K[X_i]$  von einem separablen Polynom erzeugt.

**Beweis.**

(c)  $\implies$  (b) ist trivial.

(b)  $\implies$  (a) folgt aus dem gerade bewiesenen Satz von Seidenberg und dem ersten Satz dieses Abschnitts.

(a)  $\implies$  (c) folgt aus Teil (b) des ersten Lemmas. □

**Proposition.** Gelte  $\text{char } K = 0$ . Seien  $f \in K[X] \setminus \{0\}$  und  $g, h \in K[X]$  mit  $(f, f') = (h)$  und  $f = gh$ . Dann gilt

$$\sqrt{(f)} = (g)$$

und  $g$  ist separabel.

Proposition. Gelte  $\text{char } K = 0$ . Seien  $f \in K[X] \setminus \{0\}$  und  $g, h \in K[X]$  mit  $(f, f') = (h)$  und  $f = gh$ . Dann gilt

$$\sqrt{(f)} = (g)$$

und  $g$  ist separabel.

Beweis.

$\mathfrak{O}_f$  normiert. Wähle dann  $m \in \mathbb{N}_0$ , paarweise verschiedene  $a_1, \dots, a_d \in C$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{N}$  mit  $f = \prod_{i=1}^d (X - a_i)^{\alpha_i}$ . Es folgt  $f' = \sum_{i=1}^d \alpha_i (X - a_i)^{\alpha_i - 1} \prod_{j \neq i} (X - a_j)^{\alpha_j}$ , woraus man wegen  $\text{char } K = 0$  sieht, dass das von  $f$  und  $f'$  in  $C[X]$  erzeugte Ideal von  $\prod_{i=1}^d (X - a_i)^{\alpha_i - 1}$  erzeugt wird.

**Proposition.** Gelte  $\text{char } K = 0$ . Seien  $f \in K[X] \setminus \{0\}$  und  $g, h \in K[X]$  mit  $(f, f') = (h)$  und  $f = gh$ . Dann gilt

$$\sqrt{(f)} = (g)$$

und  $g$  ist separabel.

**Beweis.**

$\mathfrak{C} f$  normiert. Wähle dann  $m \in \mathbb{N}_0$ , paarweise verschiedene  $a_1, \dots, a_d \in \mathfrak{C}$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{N}$  mit  $f = \prod_{i=1}^d (X - a_i)^{\alpha_i}$ . Es folgt  $f' = \sum_{i=1}^d \alpha_i (X - a_i)^{\alpha_i - 1} \prod_{j \neq i} (X - a_j)^{\alpha_j}$ , woraus man wegen  $\text{char } K = 0$  sieht, dass das von  $f$  und  $f'$  in  $\mathfrak{C}[X]$  erzeugte Ideal von  $\prod_{i=1}^d (X - a_i)^{\alpha_i - 1}$  erzeugt wird. Da  $h$  laut Voraussetzung das von  $f$  und  $f'$  in  $K[X]$  und damit auch in das davon in  $\mathfrak{C}[X]$  erzeugte Ideal erzeugt, gilt  $(h) = (\prod_{i=1}^d (X - a_i)^{\alpha_i - 1}) \subseteq \mathfrak{C}[X]$  und daher  $\mathfrak{C} h = \prod_{i=1}^d (X - a_i)^{\alpha_i - 1}$ .

**Proposition.** Gelte  $\text{char } K = 0$ . Seien  $f \in K[X] \setminus \{0\}$  und  $g, h \in K[X]$  mit  $(f, f') = (h)$  und  $f = gh$ . Dann gilt

$$\sqrt{(f)} = (g)$$

und  $g$  ist separabel.

**Beweis.**

$\mathfrak{C} f$  normiert. Wähle dann  $m \in \mathbb{N}_0$ , paarweise verschiedene  $a_1, \dots, a_d \in \mathfrak{C}$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{N}$  mit  $f = \prod_{i=1}^d (X - a_i)^{\alpha_i}$ . Es folgt  $f' = \sum_{i=1}^d \alpha_i (X - a_i)^{\alpha_i - 1} \prod_{j \neq i} (X - a_j)^{\alpha_j}$ , woraus man wegen  $\text{char } K = 0$  sieht, dass das von  $f$  und  $f'$  in  $\mathfrak{C}[X]$  erzeugte Ideal von  $\prod_{i=1}^d (X - a_i)^{\alpha_i - 1}$  erzeugt wird. Da  $h$  laut Voraussetzung das von  $f$  und  $f'$  in  $K[X]$  und damit auch in das davon in  $\mathfrak{C}[X]$  erzeugte Ideal erzeugt, gilt  $(h) = (\prod_{i=1}^d (X - a_i)^{\alpha_i - 1}) \subseteq \mathfrak{C}[X]$  und daher  $\mathfrak{C} h = \prod_{i=1}^d (X - a_i)^{\alpha_i - 1}$ . Somit  $g = (X - a_1) \cdots (X - a_n)$ .

**Proposition.** Gelte  $\text{char } K = 0$ . Seien  $f \in K[X] \setminus \{0\}$  und  $g, h \in K[X]$  mit  $(f, f') = (h)$  und  $f = gh$ . Dann gilt

$$\sqrt{(f)} = (g)$$

und  $g$  ist separabel.

**Beweis.**

$\mathbb{C} f$  normiert. Wähle dann  $m \in \mathbb{N}_0$ , paarweise verschiedene  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{C}$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{N}$  mit  $f = \prod_{i=1}^d (X - a_i)^{\alpha_i}$ . Es folgt  $f' = \sum_{i=1}^d \alpha_i (X - a_i)^{\alpha_i - 1} \prod_{j \neq i} (X - a_j)^{\alpha_j}$ , woraus man wegen  $\text{char } K = 0$  sieht, dass das von  $f$  und  $f'$  in  $\mathbb{C}[X]$  erzeugte Ideal von  $\prod_{i=1}^d (X - a_i)^{\alpha_i - 1}$  erzeugt wird. Da  $h$  laut Voraussetzung das von  $f$  und  $f'$  in  $K[X]$  und damit auch in das davon in  $\mathbb{C}[X]$  erzeugte Ideal erzeugt, gilt  $(h) = (\prod_{i=1}^d (X - a_i)^{\alpha_i - 1}) \subseteq \mathbb{C}[X]$  und daher  $\mathbb{C} h = \prod_{i=1}^d (X - a_i)^{\alpha_i - 1}$ . Somit  $g = (X - a_1) \cdots (X - a_n)$ . Entweder mit dem Hilbertschen Nullstellensatz 1.3.9 oder mit linearer Algebra sieht man nun leicht  $\sqrt{(f)} = (g)$ .

**Proposition.** Gelte  $\text{char } K = 0$ . Seien  $f \in K[X] \setminus \{0\}$  und  $g, h \in K[X]$  mit  $(f, f') = (h)$  und  $f = gh$ . Dann gilt

$$\sqrt{(f)} = (g)$$

und  $g$  ist separabel.

**Beweis.**

$\mathbb{C} f$  normiert. Wähle dann  $m \in \mathbb{N}_0$ , paarweise verschiedene  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{C}$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{N}$  mit  $f = \prod_{i=1}^d (X - a_i)^{\alpha_i}$ . Es folgt  $f' = \sum_{i=1}^d \alpha_i (X - a_i)^{\alpha_i - 1} \prod_{j \neq i} (X - a_j)^{\alpha_j}$ , woraus man wegen  $\text{char } K = 0$  sieht, dass das von  $f$  und  $f'$  in  $\mathbb{C}[X]$  erzeugte Ideal von  $\prod_{i=1}^d (X - a_i)^{\alpha_i - 1}$  erzeugt wird. Da  $h$  laut Voraussetzung das von  $f$  und  $f'$  in  $K[X]$  und damit auch in das davon in  $\mathbb{C}[X]$  erzeugte Ideal erzeugt, gilt  $(h) = (\prod_{i=1}^d (X - a_i)^{\alpha_i - 1}) \subseteq \mathbb{C}[X]$  und daher  $\mathbb{C} h = \prod_{i=1}^d (X - a_i)^{\alpha_i - 1}$ . Somit  $g = (X - a_1) \cdots (X - a_n)$ . Entweder mit dem Hilbertschen Nullstellensatz 1.3.9 oder mit linearer Algebra sieht man nun leicht  $\sqrt{(f)} = (g)$ . Dass  $g$  separabel ist, ist klar.  $\square$

## Radikalideale berechnen

**Satz.** Gelte  $\text{char } K = 0$  und sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal mit  $\#V(I) < \infty$ . Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  erzeuge  $f_i \in K[X_i]$  das Eliminationsideal  $I \cap K[X_i]$  und es seien  $g_i, h_i \in K[X]$  mit  $(f_i, f'_i) = (h_i) \subseteq K[X_i]$  und  $f_i = g_i h_i$ . Dann

$$\sqrt{I} = (I \cup \{g_1, \dots, g_n\}).$$

**Beweis.**

Nach der letzten Proposition ist  $g_i \in K[X_i]$  separabel mit  $g_i \in \sqrt{I}$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Nach dem Satz von Seidenberg ist  $(I \cup \{g_1, \dots, g_n\})$  ein Radikalideal. □

**Interpolationslemma.** Seien  $\ell \in \mathbb{N}_0$ ,  $x_1, \dots, x_\ell \in K^n$  paarweise verschieden und  $y_1, \dots, y_\ell \in K$ .

Dann gibt es  $f \in K[X_1, \dots, X_n]$  mit  $f(x_i) = y_i$  für  $i \in \{1, \dots, \ell\}$ .

**Beweis.**

☞  $\ell \geq 1$ ,  $y_1 = 1$  und  $y_2 = \dots = y_\ell = 0$ .

Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ :



**Interpolationslemma.** Seien  $\ell \in \mathbb{N}_0$ ,  $x_1, \dots, x_\ell \in K^n$  paarweise verschieden und  $y_1, \dots, y_\ell \in K$ .

Dann gibt es  $f \in K[X_1, \dots, X_n]$  mit  $f(x_i) = y_i$  für  $i \in \{1, \dots, \ell\}$ .

**Beweis.**

☞  $\ell \geq 1$ ,  $y_1 = 1$  und  $y_2 = \dots = y_\ell = 0$ .

Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$n = 0$  Wegen  $K^0 = \{0\}$  gilt  $\ell = 1$ . Setze also  $f := 1 \in K$ .



**Interpolationslemma.** Seien  $\ell \in \mathbb{N}_0$ ,  $x_1, \dots, x_\ell \in K^n$  paarweise verschieden und  $y_1, \dots, y_\ell \in K$ .

Dann gibt es  $f \in K[X_1, \dots, X_n]$  mit  $f(x_i) = y_i$  für  $i \in \{1, \dots, \ell\}$ .

**Beweis.**

☞  $\ell \geq 1$ ,  $y_1 = 1$  und  $y_2 = \dots = y_\ell = 0$ .

Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$n = 1$  Setze

$$f := \frac{\prod_{i=2}^{\ell} (X_1 - x_i)}{\prod_{i=2}^{\ell} (x_1 - x_i)} \in K[X_1].$$



**Interpolationslemma.** Seien  $\ell \in \mathbb{N}_0$ ,  $x_1, \dots, x_\ell \in K^n$  paarweise verschieden und  $y_1, \dots, y_\ell \in K$ .

Dann gibt es  $f \in K[X_1, \dots, X_n]$  mit  $f(x_i) = y_i$  für  $i \in \{1, \dots, \ell\}$ .

**Beweis.**

☞  $\ell \geq 1$ ,  $y_1 = 1$  und  $y_2 = \dots = y_\ell = 0$ .

Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$n-1 \rightarrow n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) Schreibe  $x_i = (x'_i, x''_i)$  mit  $x_i \in K^{n-1}$  und  $x''_i \in K$  für  $i \in \{1, \dots, \ell\}$ . Nach allfälligem Umm Nummerieren gibt es  $k \in \{1, \dots, \ell\}$  mit

$$x''_1 = \dots = x''_k \notin \{x''_{k+1}, \dots, x''_\ell\}.$$

Nach dem schon bewiesenen Fall  $n=1$  gibt es

$g \in K[X_n]$  mit  $g(x''_1) = 1$  und  $g(x''_i) = 0$  für alle  $i \in \{k+1, \dots, \ell\}$ .

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es weiter

$h \in K[X_1, \dots, X_{n-1}]$  mit  $h(x'_1) = 1$  und  $h(x'_2) = \dots = h(x'_k) = 0$ .

Setze  $f := gh$ .

□

**Lemma.** Sei  $I \subseteq C[X]$  ein Ideal mit  $\#V(I) < \infty$ . Dann ist der  $C$ -Algebrenhomomorphismus

$$\varphi: C[X]/I \rightarrow C^{V(I)}, \bar{p} \mapsto (p(x))_{x \in V(I)} \quad (p \in C[X])$$

surjektiv. Ist  $I$  ein Radikalideal, so ist  $\varphi$  sogar ein Isomorphismus.

**Lemma.** Sei  $I \subseteq C[X]$  ein Ideal mit  $\#V(I) < \infty$ . Dann ist der  $C$ -Algebrenhomomorphismus

$$\varphi: C[X]/I \rightarrow C^{V(I)}, \bar{p} \mapsto (p(x))_{x \in V(I)} \quad (p \in C[X])$$

surjektiv. Ist  $I$  ein Radikalideal, so ist  $\varphi$  sogar ein Isomorphismus.

**Beweis.**

Die erste Aussage ist aus dem Interpolationslemma klar.

**Lemma.** Sei  $I \subseteq C[\underline{X}]$  ein Ideal mit  $\#V(I) < \infty$ . Dann ist der  $C$ -Algebrenhomomorphismus

$$\varphi: C[\underline{X}]/I \rightarrow C^{V(I)}, \bar{p} \mapsto (p(x))_{x \in V(I)} \quad (p \in C[\underline{X}])$$

surjektiv. Ist  $I$  ein Radikalideal, so ist  $\varphi$  sogar ein Isomorphismus.

**Beweis.**

Die erste Aussage ist aus dem Interpolationslemma klar. Sei nun  $I$  ein Radikalideal. Wegen  $I = \sqrt{I} \stackrel{1.3.9}{=} I(V(I))$  gilt dann mit  $K := C$  und  $V := V(I)$ , dass  $K[V] = C[\underline{X}]/I$ .

**Lemma.** Sei  $I \subseteq C[\underline{X}]$  ein Ideal mit  $\#V(I) < \infty$ . Dann ist der  $C$ -Algebrenhomomorphismus

$$\varphi: C[\underline{X}]/I \rightarrow C^{V(I)}, \bar{p} \mapsto (p(x))_{x \in V(I)} \quad (p \in C[\underline{X}])$$

surjektiv. Ist  $I$  ein Radikalideal, so ist  $\varphi$  sogar ein Isomorphismus.

**Beweis.**

Die erste Aussage ist aus dem Interpolationslemma klar. Sei nun  $I$  ein Radikalideal. Wegen  $I = \sqrt{I} \stackrel{1.3.9}{=} I(V(I))$  gilt dann mit  $K := C$  und  $V := V(I)$ , dass  $K[V] = C[\underline{X}]/I$ . Es ist dann  $\varphi$  nichts anderes als der  $K$ -Algebrenisomorphismus  $K[V] \rightarrow \text{Mor}_K(V, \mathbb{A})$  aus 1.5.8.  $\square$

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal mit  $\#V(I) < \infty$ .

(a)  $\#V(I) \leq \dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$

(b) Ist  $K$  vollkommen und  $I$  ein Radikalideal, so  
 $\#V(I) = \dim_K(K[\underline{X}]/I)$ .

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal mit  $\#V(I) < \infty$ .

(a)  $\#V(I) \leq \dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$

(b) Ist  $K$  vollkommen und  $I$  ein Radikalideal, so  
 $\#V(I) = \dim_K(K[\underline{X}]/I)$ .

**Beweis.**

Wähle eine Gröbnerbasis  $G$  von  $I$  und sei  $J$  das von  $G$  in  $C[\underline{X}]$  erzeugte Ideal. Es gilt natürlich  $V(I) = V(G) = V(J)$ .

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal mit  $\#V(I) < \infty$ .

(a)  $\#V(I) \leq \dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$

(b) Ist  $K$  vollkommen und  $I$  ein Radikalideal, so  
 $\#V(I) = \dim_K(K[\underline{X}]/I)$ .

**Beweis.**

Wähle eine Gröbnerbasis  $G$  von  $I$  und sei  $J$  das von  $G$  in  $C[\underline{X}]$  erzeugte Ideal. Es gilt natürlich  $V(I) = V(G) = V(J)$ . Es ist  $\text{redM}(G)$

[→2.4.10] sowohl eine Basis für den  $K$ -Vektorraum der modulo  $G$  reduzierten Polynome aus  $K[\underline{X}]$  als auch für den  $C$ -Vektorraum der modulo  $G$  reduzierten Polynome aus  $C[\underline{X}]$  [→2.4.1(b)].

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal mit  $\#V(I) < \infty$ .

(a)  $\#V(I) \leq \dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$

(b) Ist  $K$  vollkommen und  $I$  ein Radikalideal, so  
 $\#V(I) = \dim_K(K[\underline{X}]/I)$ .

**Beweis.**

Wähle eine Gröbnerbasis  $G$  von  $I$  und sei  $J$  das von  $G$  in  $C[\underline{X}]$  erzeugte Ideal. Es gilt natürlich  $V(I) = V(G) = V(J)$ . Es ist  $\text{redM}(G)$

[→2.4.10] sowohl eine Basis für den  $K$ -Vektorraum der modulo  $G$  reduzierten Polynome aus  $K[\underline{X}]$  als auch für den  $C$ -Vektorraum der modulo  $G$  reduzierten Polynome aus  $C[\underline{X}]$  [→2.4.1(b)]. Wegen 2.4.7(i) gilt also  $\dim_K(K[\underline{X}]/I) = \dim_C(C[\underline{X}]/J)$ , denn  $G$  ist auch eine Gröbnerbasis von  $J$  nach dem Buchberger-Kriterium 2.5.4.

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal mit  $\#V(I) < \infty$ .

(a)  $\#V(I) \leq \dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$

(b) Ist  $K$  vollkommen und  $I$  ein Radikalideal, so  
 $\#V(I) = \dim_K(K[\underline{X}]/I)$ .

**Beweis.**

Wähle eine Gröbnerbasis  $G$  von  $I$  und sei  $J$  das von  $G$  in  $C[\underline{X}]$  erzeugte Ideal. Es gilt natürlich  $V(I) = V(G) = V(J)$ . Es ist  $\text{redM}(G)$  [→2.4.10] sowohl eine Basis für den  $K$ -Vektorraum der modulo  $G$  reduzierten Polynome aus  $K[\underline{X}]$  als auch für den  $C$ -Vektorraum der modulo  $G$  reduzierten Polynome aus  $C[\underline{X}]$  [→2.4.1(b)]. Wegen 2.4.7(i) gilt also  $\dim_K(K[\underline{X}]/I) = \dim_C(C[\underline{X}]/J)$ , denn  $G$  ist auch eine Gröbnerbasis von  $J$  nach dem Buchberger-Kriterium 2.5.4. Ist  $K$  vollkommen und  $I$  ein Radikalideal, so ist nach dem Korollar zum Satz von Seidenberg auch  $J$  ein Radikalideal.

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal mit  $\#V(I) < \infty$ .

(a)  $\#V(I) \leq \dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$

(b) Ist  $K$  vollkommen und  $I$  ein Radikalideal, so  
 $\#V(I) = \dim_K(K[\underline{X}]/I)$ .

**Beweis.**

Wähle eine Gröbnerbasis  $G$  von  $I$  und sei  $J$  das von  $G$  in  $C[\underline{X}]$  erzeugte Ideal. Es gilt natürlich  $V(I) = V(G) = V(J)$ . Es ist  $\text{redM}(G)$  [→2.4.10] sowohl eine Basis für den  $K$ -Vektorraum der modulo  $G$  reduzierten Polynome aus  $K[\underline{X}]$  als auch für den  $C$ -Vektorraum der modulo  $G$  reduzierten Polynome aus  $C[\underline{X}]$  [→2.4.1(b)]. Wegen 2.4.7(i) gilt also  $\dim_K(K[\underline{X}]/I) = \dim_C(C[\underline{X}]/J)$ , denn  $G$  ist auch eine Gröbnerbasis von  $J$  nach dem Buchberger-Kriterium 2.5.4. Ist  $K$  vollkommen und  $I$  ein Radikalideal, so ist nach dem Korollar zum Satz von Seidenberg auch  $J$  ein Radikalideal. Wir sehen also, dass wir  $\mathbb{C} K = C$  voraussetzen dürfen.

**Satz.** Sei  $I \subseteq K[\underline{X}]$  ein Ideal mit  $\#V(I) < \infty$ .

(a)  $\#V(I) \leq \dim_K(K[\underline{X}]/I) < \infty$

(b) Ist  $K$  vollkommen und  $I$  ein Radikalideal, so  
 $\#V(I) = \dim_K(K[\underline{X}]/I)$ .

**Beweis.**

Wähle eine Gröbnerbasis  $G$  von  $I$  und sei  $J$  das von  $G$  in  $C[\underline{X}]$  erzeugte Ideal. Es gilt natürlich  $V(I) = V(G) = V(J)$ . Es ist  $\text{redM}(G)$

[→2.4.10] sowohl eine Basis für den  $K$ -Vektorraum der modulo  $G$  reduzierten Polynome aus  $K[\underline{X}]$  als auch für den  $C$ -Vektorraum der modulo  $G$  reduzierten Polynome aus  $C[\underline{X}]$  [→2.4.1(b)]. Wegen 2.4.7(i)

gilt also  $\dim_K(K[\underline{X}]/I) = \dim_C(C[\underline{X}]/J)$ , denn  $G$  ist auch eine Gröbnerbasis von  $J$  nach dem Buchberger-Kriterium 2.5.4. Ist  $K$  vollkommen und  $I$  ein Radikalideal, so ist nach dem Korollar zum Satz

von Seidenberg auch  $J$  ein Radikalideal. Wir sehen also, dass wir  $\mathbb{C}$

$K = C$  voraussetzen dürfen. Dann folgt alles aus dem gerade

bewiesenen Lemma (und dem Satz am Anfang des Kapitels). □

# Berechnung der Anzahl der Lösungen

**Korollar.** Sei  $G$  eine Gröbnerbasis des Ideals  $I \subseteq K[\underline{X}]$  mit  $\#V(I) < \infty$ .

(a)  $\#V(I) \leq \# \text{redM}(G) < \infty$

(b) Ist  $K$  vollkommen und  $I$  ein Radikalideal, so  $\#V(I) = \# \text{redM}(G)$ .

**Beweis.**

Nach 2.4.7(i) ist  $\text{red}(G) \rightarrow K[\underline{X}]/I$  ein  $K$ -Vektorraumisomorphismus. □

# Berechnung der Anzahl der Lösungen

## Bemerkung.

- (a) Ist  $G$  eine Gröbnerbasis des Ideals  $I \subseteq K[\underline{X}]$ , so kann man  $\#\text{redM}(G) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  mit 2.4.11(a) leicht bestimmen.

# Berechnung der Anzahl der Lösungen

## Bemerkung.

(a) Ist  $G$  eine Gröbnerbasis des Ideals  $I \subseteq K[\underline{X}]$ , so kann man  $\#\text{redM}(G) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  mit 2.4.11(a) leicht bestimmen.

(b) Gelte  $\text{char } K = 0$  und sei  $F \subseteq K[\underline{X}]$  endlich.

Dann kann man  $\#V(F) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  wie folgt bestimmen:

Berechne mit dem Buchberger-Algorithmus 2.5.6 eine Gröbnerbasis  $G$  des Ideals  $I := (F)$ . Überprüfe durch Betrachtung der Leitmonome von Elementen von  $G$ , ob  $\#V(I) = \infty$ .

# Berechnung der Anzahl der Lösungen

## Bemerkung.

(a) Ist  $G$  eine Gröbnerbasis des Ideals  $I \subseteq K[\underline{X}]$ , so kann man  $\#\text{redM}(G) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  mit 2.4.11(a) leicht bestimmen.

(b) Gelte  $\text{char } K = 0$  und sei  $F \subseteq K[\underline{X}]$  endlich.

Dann kann man  $\#V(F) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  wie folgt bestimmen:

Berechne mit dem Buchberger-Algorithmus 2.5.6 eine Gröbnerbasis  $G$  des Ideals  $I := (F)$ . Überprüfe durch Betrachtung der Leitmonome von Elementen von  $G$ , ob  $\#V(I) = \infty$ .

Gelte nun  $\#V(I) < \infty$ .

Berechne mit dem vorletzten Satz ein endliches  $F' \subseteq K[\underline{X}]$  mit  $(F') = \sqrt{I}$ .

# Berechnung der Anzahl der Lösungen

## Bemerkung.

(a) Ist  $G$  eine Gröbnerbasis des Ideals  $I \subseteq K[\underline{X}]$ , so kann man  $\#\text{redM}(G) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  mit 2.4.11(a) leicht bestimmen.

(b) Gelte  $\text{char } K = 0$  und sei  $F \subseteq K[\underline{X}]$  endlich.

Dann kann man  $\#V(F) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  wie folgt bestimmen:

Berechne mit dem Buchberger-Algorithmus 2.5.6 eine Gröbnerbasis  $G$  des Ideals  $I := (F)$ . Überprüfe durch Betrachtung der Leitmonome von Elementen von  $G$ , ob  $\#V(I) = \infty$ .

Gelte nun  $\#V(I) < \infty$ .

Berechne mit dem vorletzten Satz ein endliches  $F' \subseteq K[\underline{X}]$  mit  $(F') = \sqrt{I}$ . Berechne eine Gröbnerbasis  $G'$  von  $\sqrt{I}$ . Bestimme mit 2.4.11(a)  $\#\text{redM}(G')$ .

# Berechnung der Anzahl der Lösungen

## Bemerkung.

(a) Ist  $G$  eine Gröbnerbasis des Ideals  $I \subseteq K[\underline{X}]$ , so kann man  $\# \text{redM}(G) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  mit 2.4.11(a) leicht bestimmen.

(b) Gelte  $\text{char } K = 0$  und sei  $F \subseteq K[\underline{X}]$  endlich.

Dann kann man  $\#V(F) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  wie folgt bestimmen:

Berechne mit dem Buchberger-Algorithmus 2.5.6 eine Gröbnerbasis  $G$  des Ideals  $I := (F)$ . Überprüfe durch Betrachtung der Leitmonome von Elementen von  $G$ , ob  $\#V(I) = \infty$ .

Gelte nun  $\#V(I) < \infty$ .

Berechne mit dem vorletzten Satz ein endliches  $F' \subseteq K[\underline{X}]$  mit  $(F') = \sqrt{I}$ . Berechne eine Gröbnerbasis  $G'$  von  $\sqrt{I}$ . Bestimme mit 2.4.11(a)  $\# \text{redM}(G')$ .

Nach dem letzten Korollar gilt  $\#V(I) = \#V(\sqrt{I}) = \# \text{redM}(G')$ .