Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2015

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 2 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. (6P) (Verhalten sich Moduln wie Vektorräume?) Welche der folgenden Aussagen stimmen für einen beliebigen Ring R und beliebige R-Moduln M und N? Finde jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel. Bearbeite 6 von 8 Teilaufgaben. Wenn du mehr bearbeitest, werden die **besten** 6 gewertet.

(a) Sei A ein Erzeugendensystem von M und $f\colon A \to N$ eine Abbildung. Dann gibt es höchstens einen Homomorphismus $g\colon M \to N$, der f fortsetzt.

(b) M ist in N einbettbar oder N ist in M einbettbar.

(c) Sei $A \subseteq M$ linear unabhängig und $f\colon A \to N$ eine Abbildung. Dann gibt es einen Homomorphismus $g\colon M \to N$, der f fortsetzt.

(d) $(M \times N)/(M \times \{0\}) \cong N$

(e) Sei N ein Untermodul von M. Dann gibt es einen Endomorphismus f von M mit $\ker f = N$.

(f) Ist $f\colon M \to M$ ein Endomorphismus, so $M \cong \ker f \times \operatorname{im} f$.

(g) Ist M endlich erzeugt und N ein Untermodul von M, so ist auch N endlich erzeugt.

(h) Ist sowohl M in N als auch N in M einbettbar, so sind $M \cong N$.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass im Vektorraumfall (d.h. falls R Körper) alle obigen Aussagen richtig sind. Für endlichdimensionale Vektorräume wurde das in der Linearen Algebra I zumindest implizit bewiesen.

Aufgabe 2. (5P) (Untermoduln, Basen - ein praktisches Beispiel)

(a) Zeige, dass die abelsche Gruppe $\mathbb{R}^n$ (mit der komponentenweisen Addition) zu einem $\mathbb{R}^n$-Modul wird vermöge der durch

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\lambda_1 x_1\\ \vdots\\ \lambda_n x_n\end{pmatrix} \qquad (\lambda_1,\ldots,\lambda_n,a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R})$$

gegebenen Skalarmultiplikation. Zur Unterscheidung vom $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ nennen wir diesen $\mathbb{R}^n$-Modul M.

(b) Bestimme alle Untermoduln von M und überprüfe jeweils, ob sie frei sind. Welche sind isomorph zueinander?

(c) Für welche Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die Abbildung $M \to M, x \mapsto Ax$ ein Modulendomorphismus?

Definition: Sei R ein Integritätsring und M ein R-Modul. Es heißt M

(a) *divisibel*, wenn es für alle $x \in M$ und $a \in R \setminus \{0\}$ ein $y \in M$ gibt mit $x = ay$,

(b) *torsionsfrei*, wenn für alle $x \in M$ und $a \in R \setminus \{0\}$ aus $ax = 0$ schon $x = 0$ folgt.

Da abelsche Gruppen nichts anderes als $\mathbb{Z}$-Moduln sind, sind die beiden Begriffe damit auch für abelsche Gruppen definiert.

Aufgabe 3. (5P)

(a) Sei R ein Integritätsring, $S := R \setminus \{0\}$ und $K := S^{-1}R = \mathrm{qf}(R)$ der Quotientenkörper von R. Sei M ein torsionsfreier R-Modul. Zeige:

- Auf $M \times S$ wird durch

$$(x, a) \sim (b, y) :\Longleftrightarrow bx = ay \qquad (x, y \in M,\ a, b \in S)$$

eine Äquivalenzrelation $\sim$ definiert.

- Zeige, dass $(M \times S)/\sim$ mittels der folgenden Addition und Skalarmultiplikation zu einem K-Vektorraum wird:

$$\begin{aligned} \widetilde{(x,a)} + \widetilde{(y,b)} &:= \widetilde{(bx + ay, ab)} && \text{für } x, y \in M,\ a, b \in S \\ \frac{a}{b} \cdot \widetilde{(y,c)} &:= \widetilde{(ay, bc)} && \text{für } x \in M,\ a \in R,\ b, c \in S \end{aligned}$$

- $M \to (M \times S)/\sim,\ x \mapsto \widetilde{(x,1)}$ ist eine Moduleinbettung.

(b) Zeige: Jede torsionsfreie abelsche Gruppe ist Untergruppe einer divisiblen torsionsfreien abelschen Gruppe.

Abgabe bis Dienstag, den 28. April, um 12:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411 (Fach 2a).