
Übungsblatt 3 zur Polynomialen Optimierung

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Für jede Menge $A \subseteq V$ bezeichnen wir mit \overline{A} den Abschluss und $\overset{\circ}{A}$ das Innere von A . Sei $K \subseteq V$ ein Kegel. Zeige, dass dann auch \overline{K} und $\overset{\circ}{K} \cup \{0\}$ Kegel sind.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Welche der folgenden Kegel besitzt eine Einheit? Begründe Deine Aussage!

- (a) der Kegel der positiv semidefiniten Matrizen $\mathbb{R}_{\geq 0}^{t \times t}$ im Vektorraum $S\mathbb{R}^{t \times t}$ aller symmetrischen $t \times t$ -Matrizen,
- (b) der Kegel $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ der nichtnegativen stetigen Funktionen auf \mathbb{R} im Vektorraum $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen auf \mathbb{R} ,
- (c) der Kegel der nichtnegativen Polynomfunktionen in $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,
- (d) der Kegel der nichtnegativen Polynome im Vektorraum der Polynome $\mathbb{R}[X]$ in einer Variablen,
- (e) der Kegel $\sum \mathbb{R}[X]^2 := \{\sum_{i=1}^m p_i^2 \mid m \in \mathbb{N}_0, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[X]\}$ der Quadratsummen in $\mathbb{R}[X]$,
- (f) der Kegel $\sum \mathbb{R}[X]^2 + \sum \mathbb{R}[X]^2(1 - X) + \sum \mathbb{R}[X]^2(1 + X)$ bestehend aus allen Polynomen der Form $s_0 + s_1(1 - X) + s_2(1 + X)$ mit $s_0, s_1, s_2 \in \sum \mathbb{R}[X]^2$.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Betrachte für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$ das polynomiale Optimierungsproblem

$$(P_i) \quad \text{minimiere } f_i(x) \text{ über alle } x \in \mathbb{R},$$

wobei

$$\begin{aligned} f_1 &:= X^6 - 4X^5 + 6X^4 - 8X^3 + 9X^2 - 4X + 4 \in \mathbb{R}[X], \\ f_2 &:= X^6 - 4X^5 + 7X^4 - 8X^3 + 7X^2 - 4X + 1 \in \mathbb{R}[X] \quad \text{und} \\ f_3 &:= X^6 - 6X^5 + 15X^4 - 24X^3 + 30X^2 - 24X + 8 \in \mathbb{R}[X]. \end{aligned}$$

Füge analog zu Beispiel 1.4.1 aus der Vorlesung zu (P_i) die folgende durch $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ parametrisierte Schar von redundanten Ungleichungen dazu:

$$(a + bx + cx^2 + dx^3)^2 \geq 0 \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}),$$

schreibe diese Schar als eine einzige polynomiale Matrixungleichung, relaxiere diese zu einer linearen Matrixungleichung $M_i(y) \succeq 0$ und betrachte die Relaxierung

$$(R_i) \quad \text{minimiere } \ell_i(y) \text{ über alle } y \in \mathbb{R}^6 \text{ mit } M_i(y) \succeq 0$$

von (P_i) mit $\ell_i \in \mathbb{R}[Y_1, \dots, Y_6]_1$ und $M_i \in \text{SR}[Y_1, \dots, Y_6]_1^{4 \times 4}$. Finde mit dem Rechner annähernd optimale Lösungen $y_i^* \in \mathbb{R}^6$ von (R_i) und die Optimalwerte R_i^* für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$. Finde $\lambda \in [0, 1]$ mit

$$y_3^* \approx \lambda y_1^* + (1 - \lambda) y_2^*.$$

Faktorisiere jedes f_i in $\mathbb{R}[X]$. Welche Beobachtungen machst Du? Welche Fragen stellen sich? Kommentiere!

Abgabe bis Dienstag, den 26. Mai 2015, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.