Universität Konstanz Sebastian Gruler
Fachbereich Mathematik und Statistik María López Quijorna
Sommersemester 2015 Markus Schweighofer

Übungsblatt 5 zur Polynomialen Optimierung

Aufgabe 1 (9 Punkte). Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$. Betrachte das polynomiale Optimierungsproblem

$$(P) \qquad \text{minimiere } f(x) \text{ über } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0$$

und die dazugehörige Momentenrelaxierung vom Grad k

$$(P_k) \qquad \text{minimiere } L(f) \text{ über } L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^* \text{ mit } L(T_k(p_1, \dots, p_m)) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ und } L(1) = 1.$$

Bezeichne $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$ den zulässigen Bereich von (P).

(a) Zeige $P^* \geq P^*_\infty \geq \dots \geq P^*_{k+3} \geq P^*_{k+2} \geq P^*_{k+1} \geq P^*_k$

(b) Es besitze $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ eine Quadraturformel, deren Stützstellen alle in S liegen und deren Gewichte sich zu 1 aufsummieren. Zeige, dass dann L eine zulässige Lösung von (P_k) mit $L(f) \geq P^*$ ist.

(c) Es habe (P_k) eine optimale Lösung L^*, die eine Quadraturformel mit allen Stützstellen in S besitzt. Zeige, dass dann in (a) überall Gleichheit gilt.

(d) In der Situation von (c) habe zusätzlich (P) eine eindeutige optimale Lösung x^*. Zeige, dass dann $k \geq 1$, $x^* = (L(X_1), \dots, L(X_n))$ und allgemeiner $L^*(p) = p(x^*)$ für alle $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$ gilt.

Aufgabe 2 (5 Punkte). Betrachte für $a \in \mathbb{R}$ die lineare Abbildung $L_a \colon \mathbb{R}[X]_4 \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch $L_a(1) = 1$, $L_a(X) = 0$, $L_a(X^2) = 1$, $L_a(X^3) = 0$ und $L_a(X^4) = a$.

(a) Untersuche mit Hilfe von Lemma 3.1.8, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Bedingung

$$L_a\left(\mathbb{R}[X]_4 \cap \sum \mathbb{R}[X]^2\right) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$$

gilt.

(b) Finde ein $a \in \mathbb{R}$, für das L_a eine Quadraturformel besitzt und gebe eine solche an.

Aufgabe 3 (6 Punkte). Finde $m, n \in \mathbb{N}_0$, $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit

$$T_k(p_1, \dots, p_m) \neq \mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap T(p_1, \dots, p_m).$$

Abgabe bis Dienstag, den 23. Juni 2015, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.