Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Merlin Carl
Markus Schweighofer

Übungsblatt 4 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: Gilt für alle Gruppen G, G', H, H'

$$(G \cong G' \,\&\, H \cong H') \implies G \times H \cong G' \times H' \quad ?$$

Falls ja, begründe Deine Behauptung. Falls nicht, gib ein Gegenbeispiel an.

(a) $(\mathbb{Q}, \cdot, +)$, wobei $+$ und $\cdot$ die übliche Addition und Multiplikation rationaler Zahlen bezeichnen.

(b) $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, +, \cdot)$, wobei $+$ und $\cdot$ die komponentenweise Addition und Multiplikation bezeichnen.

(c) $(\{0, 1\}, +, \cdot)$, wobei $+$ durch $0 + 0 = 1 + 1 = 0$ sowie $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ und $\cdot$ durch $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ sowie $1 \cdot 1 = 1$ gegeben ist.

Aufgabe 3: Bei welchen der folgenden Relationen $\sim$ auf der Trägermenge der jeweils angegeben Gruppe handelt es sich um eine Kongruenzrelationen auf dieser Gruppe?

(a) $(\mathbb{R}, +)$ $\quad \sim$ definiert durch $x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; x - y \in \mathbb{Z}$

(b) $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, +)$, $\quad \sim$ definiert durch

$$f \sim g :\Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall i \in \mathbb{N} : (i > n \implies f(i) = g(i)) \qquad (f, g \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}})$$

(c) $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, +)$, $\quad \sim$ definiert durch

$$f \sim g \;:\Longleftrightarrow\; \exists n \in \mathbb{Z} : \forall i \in \mathbb{N} : (i > n \,\&\, f(i) = g(i)) \qquad (f, g \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}})$$

(d) $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, $\quad \sim$ definiert durch $x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; x - y \in \mathbb{Z} \qquad (x, y \in \mathbb{R})$

(e) $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, +)$, $\quad \sim$ definiert durch $(a, b) \sim (c, d) \;:\Longleftrightarrow\; ad = bc \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{Q})$

Aufgabe 4: Zu einer Menge X sei $G_X := (\mathscr{P}(X), \Delta)$, wobei $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ für alle $A, B \in \mathscr{P}(X)$. Es seien X und Y Mengen mit $X \subseteq Y$. Zeige:

(a) G_X ist eine Untergruppe von G_Y.

(b) $G_Y / G_X \cong G_{Y \setminus X}$

Zusatzaufgabe für Interessierte: Ist G eine abelsche Gruppe, so nennen wir ihre Untergruppen $\{0\}$ und G die *trivialen* Untergruppen von G. Existiert eine abelsche Gruppe G,

(a) die eine nichttriviale Untergruppe H besitzt mit $G \cong H$?

(b) für die $G \neq \{0\}$ und $G \cong G \times G$ gilt?

(c) die eine nichttriviale Untergruppe H mit $G \cong G/H$ besitzt?

Gib jeweils im Fall einer positiven Antwort ein Beispiel und im Fall einer negativen Antwort einen Beweis an.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Montag, den 27. November 2017, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihrer/s TutorIn/s in der 4. Etage des F-Gebäudes.