Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Merlin Carl
Markus Schweighofer

Übungsblatt 5 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: Sei A ein kommutativer Ring mit $0 \neq 1$ in A. Betrachte den Polynomring $A[X]$ über A in X und seine Unterringe $A[X^m]$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zeige
$$A[X^\ell] \subseteq A[X^m] \iff \ell \in \langle m \rangle_\mathbb{Z}$$
für alle $\ell, m \in \mathbb{N}$.

(b) Zeige $A[X^\ell] \cong A[X^m]$ für alle $\ell, m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$. Zeige, dass die abelschen Gruppen $\mathbb{Z}/\langle n^2 \rangle$ und $\mathbb{Z}/\langle n \rangle \times \mathbb{Z}/\langle n \rangle$ nicht isomorph sind.

Aufgabe 3: Gib jeweils an, ob durch die angegebene Vorschrift eine Abbildung definiert wird („Wohldefiniertheit“). Falls eine Abbildung vorliegt, gib jeweils an, ob es sich um einen Ringhomomorphismus, Ringmonomorphismus, Ringepimorphismus oder Ringisomorphismus handelt. Alle Aussagen sind kurz aber prägnant zu begründen.

(a) $\mathbb{Z}/(20) \to \mathbb{Z}/(100)$, $\overline{n}^{\langle 20 \rangle} \mapsto \overline{5n}^{\langle 100 \rangle}$

(b) $\mathbb{Z}/(20) \to \mathbb{Z}/(101)$, $\overline{n}^{\langle 20 \rangle} \mapsto \overline{5n}^{\langle 101 \rangle}$

(c) $\mathbb{Z}/(116) \to \mathbb{Z}/(4)$, $\overline{n}^{\langle 116 \rangle} \mapsto \overline{29n}^{\langle 4 \rangle}$

(d) $\mathbb{Z}/(7) \to \mathbb{Z}/(7)$, $\overline{n}^{\langle 7 \rangle} \mapsto \overline{n+1}^{\langle 7 \rangle}$

Aufgabe 4:

(a) Zeige, dass zwei zueinander isomorphe Ringe stets auch zueinander isomorphe additive Gruppe besitzen. Sind auch ihre beiden Einheitengruppen stets zueinander isomorph?

(b) Wieviele x mit $x + x = 0$ gibt es in einem Körper, in dem $1 + 1 \neq 0$ gilt?

(c) Wieviele x mit $x \cdot x = 1$ gibt es in einem Körper, in dem $1 + 1 \neq 0$ gilt?

(d) Können die additive und die multiplikative Gruppe eines Körpers, in dem $1 + 1 \neq 0$ gilt, zueinander isomorph sein?

(e) Können die additive und die multiplikative Gruppe eines Körpers, in dem $1 + 1 = 0$ gilt, zueinander isomorph sein?

Zusatzaufgabe für Interessierte:

(a) Ist die abelsche Gruppe $\mathbb{R}_{>0}$ mit der gewöhnlichen Multiplikation die additive Gruppe eines kommutativen Ringes? Und wie wäre das mit $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ statt $\mathbb{R}_{>0}$?

(b) Betrachte die abelsche Gruppe $\mathbb{Q}$ mit der gewöhnlichen Addition, ihre Untergruppe $\mathbb{Z}$ und die Quotientengruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Ist diese die additive Gruppe eines kommutativen Ringes?

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Montag, den 04. Dezember 2017, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihrer/s TutorIn/s in der 4. Etage des F-Gebäudes.