Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Merlin Carl
Markus Schweighofer

Übungsblatt 12 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und es seien U und W Unterräume von V mit $V = U \oplus W$. Nun sei $\underline{u} = (u_1, \dots, u_k)$ eine Basis von U und $\underline{w} = (w_1, \dots, w_\ell)$ eine Basis von W. Betrachte ferner das $(k + \ell)$-Tupel

$$\underline{v} := (u_1, \dots, u_k, u_1', \dots, u_l')$$

von Vektoren von V.

(a) Zeige, dass $\underline{v}$ eine Basis von V ist.

(b) Sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f(U) \subseteq U$ und $f(W) \subseteq W$. Zeige, dass dann die Darstellungsmatrix $M(f, \underline{v})$ von f bezüglich der Basis $\underline{v}$ die Blockgestalt

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

mit $A \in K^{k\times k}$ und $B \in K^{\ell\times\ell}$ hat, wobei die beiden Nullen jeweils für eine Nullmatrix mit der jeweils geeigneten Anzahl von Zeilen und Spalten stehe.

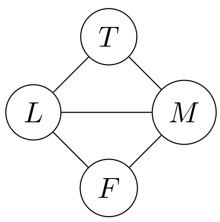
Aufgabe 2: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\sigma \in S_n$ (also $\sigma\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ bijektiv). Beschreibe die Darstellungsmatrix $A := M(f, \underline{e})$ der linearen Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis $\underline{e}$ des $\mathbb{R}^n$ und zeige, dass ihre Determinante gleich dem Vorzeichen der Permutation σ ist, das heißt

$$\det(M(f, \underline{e})) = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Aufgabe 3: Die äußerst sportliche Tina wohnt im idyllischen Dorf Znatsnok, wo es außer ihrem Wohnhaus T noch die Dorflinde L, den Marktplatz M sowie das Wohnhaus F ihres Freundes gibt. Diese sind wie folgt durch Straßen miteinander verbunden:



Jeder dieser Strecken ist genau einen Kilometer lang (auch wenn es auf dem schematischen Plan anders erscheint). Tina läuft ausschließlich auf den Straßen und zwar immer von einem Endpunkt zum anderen.

(a) Gib in vier Tabellen jeweils an, wie viele Wege der Länge 0, 1, 2 und 3 Kilometern es zwischen je zweien der Orte T, L, M und F gibt.

(b) Berechne die Potenzen $A^0 = I_4$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$ und $A^3 = AAA$ der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}.$$

(c) Stelle eine Vermutung über den Zusammenhang der Einträge von A^n und den Wegen der Länge n Kilometer für $n \in \mathbb{N}_0$ zwischen zwei Orten von Znatsnok auf und beweise sie.

(d) Tina läuft jeden Tag einen Weg von genau tausend Kilometern Länge (sie ist ja äußerst sportlich) zwischen ihrem Haus und dem ihres Freundes (dabei darf sie auf dem Weg auch mehrmals bei ihrem Freund oder bei ihr zuhause vorbeikommen). Befindet sie sich in ihrem Haus, läuft sie zu ihrem Freund und bleibt dort bis zum nächsten Morgen. Befindet sie sich bei ihrem Freund, läuft sie zu sich und bleibt dort bis zum nächsten Morgen. Dabei benutzt sie keinen Weg zweimal (auch nicht denselben rückwärts), weil ihr sonst langweilig wird. Zu Beginn befindet sie sich in ihrem Haus. Wenn es keine neuen Wege mehr gibt, bleibt sie für immer in dem Haus, in dem sie sich befindet. Wird sie zum Schluss bei sich oder bei ihrem Freund wohnen?

Aufgabe 4: Es sei K ein Körper.

(a) Seien $a_1, \ldots, a_n \in K$. Bestimme die Determinante der $n \times n$-Matrix $\begin{pmatrix} 0 & & \lambda_1 \\ & \iddots & \\ \lambda_n & & 0 \end{pmatrix}$

(b) Es seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $A_1 \in K^{n_1 \times n_1}, \ldots, A_m \in K^{n_m \times n_m}$ quadratische Matrizen mit Einträgen in K, deren Dimensionen die Summe n haben. Bestimme die Determinante der $n \times n$-Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \boxed{A_1} \\ & & \boxed{A_2} & \\ & \iddots & & \\ \boxed{A_m} & & & 0 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von m, $n_1, \ldots, n_m$ und $\det(A_1), \ldots, \det(A_m)$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei K ein endlicher Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n\times n}$. Zeige: A ist genau dann invertierbar, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = I_n$ existiert.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Montag, den 12. Februar 2018, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihrer/s TutorIn/s in der 4. Etage des F-Gebäudes.