Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Merlin Carl
Markus Schweighofer
20. März 2018

Klausur zur Linearen Algebra I

Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Übungsgruppenleiter in der Linearen Algebra I:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
erreichte Punktzahl										
Korrektor (Initialen)										
Maximalpunktzahl	14	15	20	9	9	9	9	6	9	100

Fasse den Klausurbogen nicht an, bevor die Klausur eröffnet wird!

Entferne nicht die Klammerung der Blätter. Sobald die Klausur eröffnet wird, trage auf **jeder Vorderseite sofort** Deinen Namen ein. Schreibe die Lösung zu einer Aufgabe nur auf die dafür vorgesehenen Blätter. Wenn Du noch genug Zeit hast, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Schmierpapier zu schreiben. Vergiss aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen.

Bei Manipulation von Matrizen sind die durchgeführten Spalten- oder Zeilenoperationen stets anzugeben (im Stile der Vorlesung oder ähnlich, also etwa $Z_2 \leftrightarrow Z_4$ für Vertauschung der Zeilen 2 und 4 oder $Z_1 \leftarrow Z_1 - 7Z_2$ für Subtrahieren des 7-fachen der Zeile 2 von der Zeile 1). Zögere bei Fragen nicht, Dich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen.

Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten. Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind Schreibzeug, Schmierpapier[1] und eine Uhr[2]. Viel Erfolg!

[1] anfangs unbeschrieben
[2] ohne eingebaute Kommunikationsgeräte

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 1 (Multiple-Choice, ohne Begründung, 14 Punkte). Schreibe für die folgenden 8 Fragen jeweils die Nummer aller richtigen Antworten unter die jeweilige Frage. Pro Frage sind 2 Punkte zu erreichen. Diese gibt es, wenn genau die richtigen Antworten angegeben sind. Ist nicht jede richtige Antwort, aber mindestens eine richtige und *gleichzeitig keine falsche* Antwort angegeben, so gibt es 1 Punkt. Andernfalls gibt es null Punkte. Es muss und soll **keine Begründung** gegeben werden.

(a) Für alle Mengen A und B gilt:

(1) $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$

(2) $A = B \implies A \in B$

(3) $A = B \implies A \subseteq B$

(4) $(A \subseteq B \,\&\, B \subseteq A) \implies A = B$

Richtige Antworten:

(b) Es gibt eine

(1) Abbildung

(2) Surjektion

(3) Injektion

(4) Bijektion

mit Definitionsmenge $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ und Zielmenge $\mathbb{F}_2$.

Richtige Antworten:

(c) Für alle Vektorräume V, alle Unterräume U von V und alle $v \in V/U$ gilt:

(1) $v \in V$

(2) $v \in V \setminus U$

(3) $v \subseteq V$

(4) $v \subseteq U$

Richtige Antworten:

(d) Welche der folgenden Operationen gehört nicht zur Definition eines Vektorraums?

(1) Eine Multiplikation von Elementen des Grundkörpers mit Elementen des Vektorraums.

(2) Eine Multiplikation von Elementen des Grundkörpers.

(3) Eine Multiplikation von Elementen des Vektorraums.

(4) Eine Addition von Elementen des Vektorraums.

Richtige Antworten:

Seite 2 zur Aufgabe 1

(e) Für alle kommutativen Ringe A und alle $a, b, c \in A$ gilt:

(1) $\exists x \in A : xa = 1$

(2) $a \cdot 1 = a$

(3) $a(b+c) = ab + ac$

(4) $1 + 1 \neq 1 + 1 + 1 + 1$

Richtige Antworten:

(f) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$, alle n-dimensionalen Vektorräume V und W, alle linearen Abbildungen $f : V \to W$ und alle geordneten Basen $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V und $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ von W gilt:

(1) Ist $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, so ist f ein Isomorphismus.

(2) Wenn f ein Isomorphismus ist, dann gilt $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(3) Ist $f(v_i) = w_{n+1-i}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, so ist f ein Isomorphismus.

(4) Wenn f injektiv ist, dann ist f surjektiv.

Richtige Antworten:

(g) Für jeden Körper K, für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle Matrizen $A \in K^{n \times n}$ gilt:

(1) Die Eigenvektoren von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A.

(2) Wenn die Matrix A einen Eigenwert besitzt, dann ist A eine Diagonalmatrix.

(3) Hat eine diagonalisierbare Matrix A keinen Eigenwert ungleich 1, dann ist A die Einheitsmatrix.

(4) Jede Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A ist ein Eigenwert von A.

Richtige Antworten:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 2 (Definitionen, ohne Begründung, 15 Punkte). Definiere (oder charakterisiere mittels anderer Begriffe, die in der Vorlesung vor der jeweiligen Definition drankamen)

(a) wann eine Menge M zusammen mit einer (eventuell infix geschriebenen) Abbildung $\varrho\colon M \times M \to M$ eine abelsche Gruppe ist. *3 Punkte*

(b) wann eine (infix geschriebene) Relation $\sim$ eine Kongruenzrelation auf einem vorgegebenen K-Vektorraum V ist. *3 Punkte*

(c) wann eine Abbildung $f\colon A \to B$ ein Ringisomorphismus zwischen vorgegebenen kommutativen Ringen A und B ist. *3 Punkte*

(d) die Koordinatenabbildung $\operatorname{coord}_{\underline{v}}$ bezüglich einem vorgegebenen Vektorraum V mit geordneter Basis $\underline{v}$. *3 Punkte*

(e) das Produkt $AB \in K^{\ell\times n}$ zweier Matrizen $A \in K^{\ell\times m}$ und $B \in K^{m\times n}$ bei vorgegebenem Körper K und Zahlen $\ell, m, n \in \mathbb{N}_0$. *3 Punkte*

Es muss jeweils leicht erkennbar sein, warum die gegebene Definition zu der in der Vorlesung gegebenen äquivalent ist. Es muss und soll **keine Begründung** gegeben werden.

Lösung zur Aufgabe 2:

Seite 2 zur Aufgabe 2

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

Name:

Seite 3 zur Aufgabe 2

erreichte Punktzahl:

Korrektor (Initialen):

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 3 (Beispiele, ohne Begründung, 20 Punkte). Finde

(a) $p, q \in \mathbb{P}$ und $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ derart, dass die Matrix $\begin{pmatrix} \overline{a}^{(p)} & \overline{b}^{(p)} \\ \overline{c}^{(p)} & \overline{d}^{(p)} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_p^{2\times 2}$ invertierbar ist, jedoch die Matrix $\begin{pmatrix} \overline{a}^{(q)} & \overline{b}^{(q)} \\ \overline{c}^{(q)} & \overline{d}^{(q)} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_q^{2\times 2}$ nicht invertierbar ist.

2 Punkte

(b) einen kommutativen Ring A und zwei Elemente $a, b \in A \setminus \{0\}$ mit

$$a + a = b + b + b = 0.$$

3 Punkte

(c) $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit $bc \in (a)_\mathbb{Z}$, $b \notin (a)_\mathbb{Z}$ und $c \notin (a)_\mathbb{Z}$ (wie üblich ist $(a)_\mathbb{Z}$ das von a in $\mathbb{Z}$ erzeugte Ideal). *2 Punkte*

(d) einen Vektorraum mit genau 2 ungeordneten Basen. *2 Punkte*

(e) einen Vektorraum mit genau 6 geordneten Basen. *3 Punkte*

(f) einen Körper mit genau 9 Elementen. *2 Punkte*

(g) eine abelsche Gruppe mit genau 8 Elementen. *1 Punkt*

(h) eine Matrix aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$, die triagonalisierbar, aber nicht diagonalisierbar ist. *3 Punkte*

(i) einen Vektorraumendomorphismus von $\mathbb{R}^2$ mit charakteristischem Polynom

$$X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X].$$

2 Punkte

Die Beispiele müssen leicht zu überprüfen sein. Für ein falsches Beispiel gibt es keinesfalls Punkte. Es muss genau ein konkretes Beispiel angegeben werden. Bei Angabe von mehreren Beispielen oder einer Schar von Beispielen gibt es keine Punkte! Es muss und soll **keine Begründung** gegeben werden.

Lösung zur Aufgabe 3:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 3:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 4**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 4 (Lösen linearer Gleichungssysteme, 9 Punkte). Bestimme die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \mathring{\imath}x_1 + \mathring{\imath}x_3 &= x_2 + 1 \\ x_1 + x_2 + \mathring{\imath}x_3 &= 0 \\ (1-\mathring{\imath})x_1 + \mathring{\imath}x_2 &= 1 + (1+\mathring{\imath})x_3 \end{aligned} \qquad (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{F}_9).$$

Lösung zur Aufgabe 4:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 4:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 5**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 5 (Polynome, 9 Punkte). Entscheide jeweils mit Begründung, ob es ein Polynom $p \in \mathbb{R}[X]_3 \setminus \{0\}$ (also ein reelles Polynom in einer Variablen vom Grad 0, 1, 2 oder 3) gibt mit folgender Eigenschaft:

(a) $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = 0$ *2 Punkte*

(b) $p(1) = 1 \,\&\, p(2) = 2 \,\&\, p(3) = 3$ *3 Punkte*

(c) $p(1) = 4 \,\&\, p'(1) = 6 \,\&\, p(-1) = 0 \,\&\, p'(-1) = 2$ *4 Punkte*

Hierbei bezeichne $p' := D(p)$ die formale Ableitung von p.

Lösung zur Aufgabe 5:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 5:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 6**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 6 (Quotientenring, 9 Punkte). Zeige: Der Quotientenring $\mathbb{Q}[X]/(X^2-2)$ ist isomorph zum Unterring $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ von $\mathbb{R}$. Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Lösung zur Aufgabe 6:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 6:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 7**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 7 (charakteristisches Polynom, 9 Punkte). Sei K ein Körper. Zeige durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$, dass für alle $a_1, \dots, a_{2n} \in K$ die („Antidiagonal"-)Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & a_1 \\ & \iddots & \\ a_{2n} & & 0 \end{pmatrix} \in K^{2n \times 2n}$$

das charakteristische Polynom $\prod_{i=1}^{n}(X^2 - a_i a_{2n+1-i})$ hat.

Lösung zur Aufgabe 7:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 7:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 8**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 8 (Quotientenvektorräume, 6 Punkte). Betrachte den $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $V := \mathbb{F}_2^2$ und seinen Unterraum

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Gib explizit alle Elemente von V/U als Mengen an (keine Begründung erforderlich). *2 Punkte*

(b) Führe geeignete Bezeichnungen für die Elemente von V/U ein und gib explizit die Verknüpfungstabellen für die Addition und die Skalarmultiplikation von V/U an (keine Begründung erforderlich). *2 Punkte*

(c) Zeige $U \cong V/U$. *2 Punkte*

Lösung zur Aufgabe 8:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 8:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 9**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 9 (Begleitmatrizen, 9 Punkte). Es seien K ein Körper und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in K^{6\times 6}.$$

Zeige $\chi_A = X^6$.

Hinweis: Man kann die Begleitmatrizen der Polynome $X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1$ und $X^5+X^4+X^3+X^2+X+1$ betrachten.

Lösung zur Aufgabe 9:

Seite 2 zur Aufgabe 9

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 9: