Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Sabine Burgdorf
Markus Schweighofer
20. August 2018

Nachklausur zur Linearen Algebra I, Lösungsvorschlag

Aufgabe 1. (a) 1,4
(b) 1,3
(c) 2,3,4
(d) 3,4
(e) 1
(f) 1,3,4
(g) 2

Aufgabe 3. (a) Die Begleitmatrix des Polynoms $X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}.$$

(b) $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/\langle n\rangle$
(c) Der Ring $\mathbb{F}_2[X]/(X^2)$ hat vier Elemente, nämlich $0 = \overline{0}$, $1 = \overline{1}$, $\overline{X}$ und $\overline{X+1}$. Seine Ideale sind $\{0\} = (0)$, $F_2[X]/(X^2) = (1)$ und $\{0, \overline{X}\} = (\overline{X})$.
(d) $\mathbb{R}^2 \times \{(0,0)\}$
(e) $\mathbb{F}_2^2$
(f) $\{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\},\ 1 \mapsto 5,\ 2 \mapsto 4,\ 3 \mapsto 1,\ 4 \mapsto 2,\ 5 \mapsto 3$
(g) $\mathbb{Z}/(6)$
(h) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
(i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4. Gesucht sind drei Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ derart, dass die Matrix $M = (x\ y\ z)$, deren Spalten x, y und z sind, die angegebene Gleichung erfüllt. Da Matrixmultiplikation gemäß Vorlesung „simultanes Multiplizieren mit Spaltenvektoren ist“, sind daher $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ gesucht derart, dass

$$(*) \qquad Ax = b, \quad Ay = c \quad \text{und} \quad Az = d,$$

wobei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix},\ b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ c := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } d := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es sind also drei inhomogene lineare Gleichungssysteme mit derselben linken Seite zu lösen. Dies kann man laut Vorlesung effizient bewerkstelligen, indem man die Koeffizientenmatrix des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems um drei Spalten erweitert, die den rechten Seiten entsprechen (vergleiche auch Verfahren zur Berechnung der Inversen einer Matrix). Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid b\ c\ d)$ führen wir also durch erlaubte Zeilenoperationen in eine Matrix der Form $(A' \mid b'\ c'\ d')$ mit $A' \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ in reduzierter Stufenform und $b', c', d' \in \mathbb{R}^3$ über:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{Z_1 \leftrightarrow Z_2}{\overset{Z_3 \leftarrow Z_3 - Z_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{Z_1 \leftrightarrow Z_2}{\overset{Z_3 \leftarrow Z_3 - 2Z_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\underset{Z_3 \leftrightarrow -Z_3}{\overset{Z_1 \leftarrow Z_1 - 2Z_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{Z_2 \leftrightarrow Z_2 - 2Z_3}{\overset{Z_1 \leftarrow Z_1 + Z_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Wir sehen also, dass $(*)$ äquivalent ist zu

$$(*) \qquad I_3 x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 y = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad I_3 z = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Daher kann man $M := \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ wählen (und dies ist die einzige mögliche Wahl, was aber hier irrelevant ist).

Aufgabe 5. Setze $V := \mathbb{R}[X]/(p)$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$f\colon V \to V,\ \overline{q} \to \overline{Xq}$$

wohldefiniert und linear ist. Es folgt (a), denn $f^2 = f \circ f$ ist ebenfalls linear und es gilt $f^2(\overline{q}) = f(f(\overline{q})) = f(\overline{Xq}) = \overline{X^2 q}$.

(b) Das Minimalpolynom von g kann nicht den Grad 0 haben, da V kein Nullvektorraum ist. Es kann auch nicht Grad 1 haben, denn nicht jeder Vektor $\neq 0$ aus V ist ein Eigenvektor von g (zum Beispiel $\overline{1}$, denn $g(\overline{1}) = \overline{X^2} \notin \operatorname{span}(\overline{1})$). Wenn wir $g^2 - g - \mathrm{id}_V = 0$ zeigen können, so ist also (b) gezeigt. Das rechnen wir nach: Für alle $q \in \mathbb{R}[X]$ gilt $(g^2 - g - \mathrm{id}_V)(\overline{q}) = g^2(\overline{q}) - g(\overline{q}) - \overline{q} = \overline{X^4 q} - \overline{X^2 q} - \overline{q} = \overline{X^4 q - X^2 q - q} = \overline{pq} = \overline{0} = 0.$

(c) Aus der Vorlesung wissen wir, dass $(\overline{1}, \overline{X}, \overline{X^2}, \overline{X^3})$ und daher auch $\overline{v} := (\overline{1}, \overline{X^2}, \overline{X}, \overline{X^3})$ eine Basis von $\mathbb{R}[X]/(p)$ ist. Wegen $g(\overline{1}) = \overline{X^2}$, $g(\overline{X}^2) = \overline{X^4} = \overline{1} + \overline{X^2}$, $g(\overline{X}) = \overline{X^3}$ und $g(\overline{X^3}) = \overline{X^5} \overset{Xp \in (p)}{=} \overline{X} + \overline{X^3}$ gilt

$$M(g, \underline{v}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und dies ist eine symmetrische Matrix.

(d) $\chi_g = \chi_{M(g,\underline{v})} = \det \begin{pmatrix} -X & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -X & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -X \end{pmatrix} \overset{\text{Blockdiagonal-}}{\underset{\text{gestalt}}{=}} \left(\det \begin{pmatrix} -X & 1 \\ 1 & 1-X \end{pmatrix} \right)^2 =$ $(X(X-1)-1)^2 = (X - X - 1)^2$.

(e) Wenn man im $\mathbb{R}$-Vektorraum V die Vektoren durch die jeweiligen Bilder unter $\operatorname{coord}_{\underline{v}} \colon V \to \mathbb{R}^4$ austauscht (das heißt in seiner Vektoradditionstabelle und in seiner Skalarmultiplikationstabelle), so erhält man den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$, denn $\operatorname{coord}_{\underline{v}}$ ist nach Vorlesung ein Vektorraumisomorphimus. Nach Definition der Darstellungsmatrix gilt noch mehr: Bei diesem Austauschprozess geht der Vektorraumendomorphismus g über in den Vektorraumendomorphismus $f_{M(g,\underline{v})}$. Da die Definition der Diagonalisierbarkeit eines Vektorraumendomorphismus offensichtlich nur auf strukturelle Eigenschaften zurückgreift, ist daher g genau dann diagonalisierbar, wenn $f_{M(g,\underline{v})}$ diagonalisierbar ist, also wenn die Matrix $M(g, \underline{v})$ diagonalisierbar ist. Letzteres ist nach dem allerletzten Resultat der Vorlesung der Fall, da die reelle Matrix $M(g, \underline{v})$ nach (c) symmetrisch also selbstadjungiert ist.

Aufgabe 6. Schreibe $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann gilt $f(v_1) = av_1 + cv_2$, $f(v_2) = bv_1 + dv_2$, $f(v_3) = av_3 + cv_4$, $f(v_4) = bv_3 + dv_4$, $f(v_5) = av_5 + cv_6$ und $f(v_6) = bv_5 + dv_6$. Daraus folgt

$$M(f, \underline{v}) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} A & 0 & 0 \\ \hline 0 & A & 0 \\ \hline 0 & 0 & A \end{array} \right).$$

Aufgabe 7. Sei zunächst n gerade, etwa $n = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}_0$. Wähle eine Basis $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ von V und betrachte die durch

$$\varphi(v_i) = v_{i+m} \text{ und } \varphi(v_{i+m}) = 0 \text{ für } i \in \{1, \dots, m\}$$

definierte lineare Abbildung $\varphi \colon V \to V$. Dann gilt offensichtlich $\operatorname{im} \varphi = \operatorname{span}(v_{m+1}, \dots, v_n) \subseteq \ker \varphi$. Die Dimensionsformel für die lineare Abbildung f lautet

$$\dim(\ker \varphi) + \dim(\operatorname{im} \varphi) = \dim V = n.$$

Offensichtlich gilt $\dim(\operatorname{im}\varphi) = m$ und daher auch $\dim(\ker\varphi) = m$. Mit $\operatorname{im}\varphi \subseteq \ker\varphi$ folgt daraus $\operatorname{im}\varphi = \ker\varphi$.

Sei nun umgekehrt φ ein Endomorphismus von V mit $\operatorname{im}\varphi = \ker\varphi$. Setze dann $m := \dim(\operatorname{im}\varphi) = \dim(\ker\varphi)$. Wieder mit der Dimensionsformel gilt dann $m + m = n$. Daher ist n gerade.

Aufgabe 8. Aus $A^2 = 0$ folgt $f_A(f_A(x)) = A(Ax) = A^2x = 0x = 0$ für alle $x \in K^n$, das heißt $\operatorname{im}(f_A) \subseteq \ker(f_A)$ und daher $\dim(\operatorname{im}(f_A)) \subseteq \dim(\ker(f_A))$. Es folgt mit der Dimensionsformel für die lineare Abbildung f_A, dass

$$2\dim(\operatorname{im}(f_A)) \leq \dim(\ker(f_A)) + \dim(\operatorname{im}(f_A)) = \dim V = n.$$

Daher $\operatorname{rank} A = \dim(\operatorname{im}(f_A)) \leq \frac{n}{2}$.

Aufgabe 9. (a) $\chi_A = \det(A - XI_3) = \det\begin{pmatrix} -X & 2 & 1 \\ 0 & -1-X & -1 \\ 1 & 2 & -X \end{pmatrix} = (-X^2(1+X)) + (-2) + 0 - (-1-X) - 2X - 0 = -X^2 - X^3 - 2 + 1 + X - 2X = -X^3 - X^2 - X - 1$

(b) Es gilt $\chi_A = -(X^2+1)(X+1) = (X - \mathring{i})(X + \mathring{i})(X+1)$. Daher sind die Nullstellen von χ_A und damit die Eigenwerte von A genau $\mathring{i}$, $-\mathring{i}$ und -1.

(c) Wegen $\chi_A = (X - \mathring{i})(X + \mathring{i})(X+1)$ hat jeder Eigenwert von A die algebraische Vielfachheit 1. Da die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts stets zwischen 1 und seiner algebraischen Vielfachheit liegt, hat jeder Eigenwert von A auch die geometrische Vielfachheit 1. Also zerfällt das charakteristische Polynom von A und für jeden Eigenwert von A stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein. Gemäß der Vorlesung ist daher A diagonalisierbar.

(d) Nach Cayley-Hamilton gilt $\chi_A(A) = 0$ und daher

$$0 = (A - I_3)(-\chi_A(A)) = (A - I_3)(A^3 + A^2 + A + I_3) = A^4 - I_3.$$

(e) Wegen $\chi_A(A) = 0$ gilt $A(-A^2 - A - I_3) = I_3$ und deshalb $A^{-1} = -A^2 - A - I_3 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.