Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Sabine Burgdorf
Markus Schweighofer

Übungsblatt 5 zur Einführung in die Algebra

Abgabe bis Montag, den 27. November 2017, 11.44 Uhr in die Briefkästen auf F4.

Aufgabe 17 (zählt doppelt)

Ein (endliches oder unendliches) Diagramm von Gruppenhomomorphismen

$$\cdots\cdots \quad G_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i+1} \quad \cdots\cdots$$

nennt man eine *Sequenz*. Man nennt diese Sequenz *exakt*, wenn $\ker(f_i) = \operatorname{im}(f_{i-1})$ für alle i gilt (für die G_i weder am Anfang noch am Ende des Diagramms steht). Sei eine weitere Sequenz derselben Gestalt

$$\cdots\cdots \quad H_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}} H_i \xrightarrow{g_i} H_{i+1} \quad \cdots\cdots$$

gegeben. Eine Familie von Gruppenisomorphismen $h_i\colon G_i \to H_i$ heißt ein *Isomorphismus* der beiden Sequenzen, wenn das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots\cdots & G_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] \arrow[d, "h_{i-1}"] & G_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "h_i"] & G_{i+1} \arrow[d, "h_{i+1}"] & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & H_{i-1} \arrow[r, "g_{i-1}"'] & H_i \arrow[r, "g_i"'] & H_{i+1} & \cdots\cdots
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Eine *kurze Sequenz* ist eine Sequenz der Form

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \longrightarrow 1\,,$$

wobei 1 für die einelementige Gruppe stehe. Zeige:

(a) Eine solche kurze Sequenz ist genau dann exakt, wenn f injektiv ist, g surjektiv ist und $\operatorname{im} f = \ker g$ gilt.

(b) Ist eine solche kurze Sequenz exakt, so $\operatorname{im} f \lhd G$ und $G/\operatorname{im} f \cong H$.

(c) Zeige, dass für alle Homomorphismen $\varphi\colon H \to \operatorname{Aut}(N)$ die kurze Sequenz

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow N \rtimes_\varphi H \longrightarrow H \longrightarrow 1$$

für alle Gruppen N und H exakt ist, wobei ein unbeschrifteter Pfeil hier und im folgenden jeweils für den jeweiligen kanonischen Homomorphismus stehe.

(d) Es sei $\varphi\colon H \to \operatorname{Aut}(N)$ ein Homomorphismus und es sei das Diagramm von Homomorphismen

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & N \rtimes_\varphi H \arrow[r] \arrow[d, "h"] & H \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\
1 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"'] & G \arrow[r, "g"'] & H \arrow[r] & 1
\end{tikzcd} \tag{1}$$

gegeben. Bezeichne mit h_1 und h_2 die eindeutig bestimmten Homomorphismen, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[dr] \arrow[ddr, bend right, "h_1"'] & & H \arrow[dl] \arrow[ddl, bend left, "h_2"] \\
& N \rtimes_\varphi H \arrow[d, "h"] & \\
& G &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Zeige, dass $(1, \mathrm{id}_N, h, \mathrm{id}_H, 1)$ genau dann ein Isomorphismus der beiden Zeilen des Diagramms (1) ist (das heißt h ist ein Isomorphismus, der das Diagramm zum kommutieren bringt), wenn die zweite Zeile des Diagramms (1) exakt ist und sowohl $h_1 = f$ als auch $g \circ h_2 = \mathrm{id}_H$ gelten. Hierbei bezeichne 1 die Abbildung $1 \to 1$.

(e) Es sei das Diagramm von Homomorphismen

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d] & G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & H \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\
1 \arrow[r] & N \arrow[r] & N \times H \arrow[r] & H \arrow[r] & 1
\end{tikzcd} \tag{2}$$

gegeben. Bezeichne mit h_1 und h_2 die eindeutig bestimmten Homomorphismen, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, bend right, "h_1"'] \arrow[ddr, bend left, "h_2"] & \\
& N \times H \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
N & & H
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Zeige, dass $(1, \mathrm{id}_N, h, \mathrm{id}_H, 1)$ genau dann ein Isomorphismus der beiden Zeilen des Diagramms (2) ist, wenn die erste Zeile des Diagramms (2) exakt ist und sowohl $h_1 \circ f = \mathrm{id}_N$ als auch $h_2 = g$ gelten.

(f) Es sei eine kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\ f\ } G \xrightarrow{\ g\ } H \longrightarrow 1\,,$$

gegeben. Zeige, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) Es existiert ein Gruppenhomomorphismus $g' \colon H \longrightarrow G$ mit $g \circ g' = \mathrm{id}_H$.

(ii) Es gibt einen Homomorphismus $\varphi \colon H \to \mathrm{Aut}(N)$, derart, dass die gegebene Sequenz isomorph ist zur Sequenz

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow N \rtimes_\varphi H \longrightarrow H \longrightarrow 1.$$

Unter diesen Bedingungen sagt man, dass die kurze exakte Sequenz *zerfällt*.

(g) Es sei eine kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\ f\ } G \xrightarrow{\ g\ } H \longrightarrow 1\,,$$

gegeben. Zeige, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) Es existiert ein Gruppenhomomorphismus $f' \colon G \longrightarrow N$ mit $f' \circ f = \mathrm{id}_N$.

(ii) Die gegebene Sequenz ist isomorph zur Sequenz

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow N \times H \longrightarrow H \longrightarrow 1.$$

Aufgabe 18 (zählt doppelt)

Sei A ein kommutativer Ring mit $0 \neq 1$. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Ein Polynom $p \in A[X_1, \dots, X_n]$ heißt *symmetrisch*, wenn

$$p(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = p$$

für alle $\sigma \in S_n$ gilt. Es bezeichne $R^{(n)}$ den Unterring von $A[X_1, \dots, X_n]$ der symmetrischen Polynome aus $A[X_1, \dots, X_n]$. Wir definieren die *elementarsymmetrischen Polynome* $s_1^{(n)}, \dots, s_n^{(n)} \in R^{(n)}$ durch die polynomiale Identität

$$\prod_{i=1}^{n}(T + X_i) = T^n + s_1^{(n)} T^{n-1} + \dots + s_n^{(n)},$$

das heißt

$$s_k^{(n)} = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k = 1 \\ i_1 < \dots < i_k}}^{n} X_{i_1} \cdots X_{i_k}$$

für $k \in \{1, \dots, n\}$. Zeige:

(a) Ist $n \geq 1$ und $p \in R^{(n)}$, so ist $p(X_1, \dots, X_{n-1}, 0) \in R^{(n-1)}$.

(b) Ist $n \geq 1$, so ist $s_k^{(n)}(X_1, \dots, X_{n-1}, 0) = s_k^{(n-1)}$ für $k \in \{1, \dots, n-1\}$ und $s_n^{(n)}(X_1, \dots, X_{n-1}, 0) = 0$.

(c) Ist $n \geq 1$, $p \in R^{(n)}$, $f \in A[T_1, \dots, T_{n-1}]$ und

$$p(X_1, \dots, X_{n-1}, 0) = f(s_1^{(n-1)}, \dots, s_{n-1}^{(n-1)}),$$

so ist X_n ein Teiler von $q := p - f(s_1^{(n)}, \dots, s_{n-1}^{(n)})$ in $A[X_1, \dots, X_n]$.

(d) Ist $n \geq 1$, $q \in R^{(n)}$ und X_n ein Teiler von q in $A[X_1, \dots, X_n]$, so ist $s_n^{(n)}$ ein Teiler von q in $R^{(n)}$.

(e) Die vorherigen Teilaufgaben liefern ein rekursives Verfahren wie man zu einem $p \in R^{(n)}$ ein Polynom $f \in A[T_1, \dots, T_n]$ findet mit $p = f(s_1^{(n)}, \dots, s_n^{(n)})$.

(f) $R^{(n)}$ ist ein Polynomring über A in $s_1^{(n)}, \dots, s_n^{(n)}$.

Aufgabe E

Bestimme bis auf Isomorphie alle möglichen semidirekten Produkte

$$V_4 \rtimes_\varphi C_3$$

($\varphi : C_3 \to \mathrm{Aut}(V_4)$ ein Homomorphismus).

Hinweis: Zeige zunächst $\mathrm{Aut}(V_4) \cong S_3$.