Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
20. März 2018, Wintersemester 2017/2018

Sabine Burgdorf
Tim Kobert
Markus Schweighofer

Klausur zur Einführung in die Algebra

Familienname: **Vorname:**

Matrikelnummer: Übungsgruppenleiter:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
erreichte Punktzahl								
Korrektor (Initialen)								
Maximalpunktzahl	24	12	10	12	10	22	10	100

Fasse den Klausurbogen nicht an, bevor die Klausur eröffnet wird!

Entferne nicht die Klammerung der Blätter. Sobald die Klausur eröffnet wird, trage auf **jeder Vorderseite sofort** Deinen Namen ein. Schreibe die Lösung zu einer Aufgabe nur auf die dafür vorgesehenen Blätter. Wenn Du noch genug Zeit hast, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Schmierpapier zu schreiben. Vergiss aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen. Zögere bei Fragen nicht, Dich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen.

Die Bearbeitungszeit wird mündlich bekanntgegeben und beträgt etwa 180 Minuten. Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind ein "Spickzettel"[1], Schreibzeug und Schmierpapier[2]. Viel Erfolg!

Es können maximal 100 Punkte erreicht werden. Sofern nichts anderes gesagt ist, sind alle Antworten zu begründen.

Eigentlich selbstverständlich, aber wichtig: Wenn man eine Teilaufgabe nicht lösen kann, so kann man unter Verwendung der darin behaupteten Aussagen zunächst spätere Teilaussagen bearbeiten (und Punkte dafür bekommen).

[1] ein beidseitig von eigener Hand beschriebenes Blatt im Format A4
[2] anfangs unbeschrieben

Seite 1 zur Aufgabe 1

Aufgabe 1 (24 Punkte). Seien

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R}, x \neq 0, z \neq 0 \right\},$$

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R}, x > 0, z > 0 \right\} \text{ und}$$

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \;\middle|\; x, z \in \{-1, 1\} \right\}.$$

(a) Berechne für $x, y, z, x', y', z' \in \mathbb{R}$ das Produkt der Matrizen $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & z' \end{pmatrix}$. (1 Punkt)

(b) Zeige, dass für $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ und $z \neq 0$ die Matrix $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ invertierbar ist und berechne ihre Inverse. (1 Punkt)

(c) Berechne $\begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ für $x, y, z, x', y' \in \mathbb{R}$ mit $x' \neq 0$. (1 Punkt)

(d) Zeige $G = \text{◥}_2(\mathbb{R})$. (2 Punkte)

(e) Begründe sehr kurz, warum $H \leq G$ und $N \leq G$, und zeige $N \lhd G$. (2 Punkte)

(f) Zeige $G = N \rtimes H$. (2 Punkte)

(g) Zeige, dass in G jede Konjugationsklasse entweder einelementig oder unendlich ist. (3 Punkte)

(h) Zeige, dass jeder Normalteiler von G, der nicht im Zentrum von G enthalten ist, unendlich ist. (3 Punkte)

(i) Zeige $Z(G) = \{\lambda I_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}^\times\}$. (2 Punkte)

(j) Zeige $Z(G) \cong \mathbb{R}^\times$. (1 Punkt)

(k) Zeige, dass $Z(G)$ keine Untergruppe der Ordnung 4 enthält. (2 Punkte)

(l) Zeige, dass $Z(N \times H)$ eine Untergruppe der Ordnung 4 enthält. (2 Punkte)

(m) Zeige $G \ncong N \times H$. (2 Punkte)

Die Lösung dieser Aufgabe bitte auf die folgenden Seiten schreiben. Sollten Teile der Lösung auf dieser Seite sein, so werden diese bei der Korrektur ignoriert.

Name: **Seite 2 zur Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Beginn der Lösung zur Aufgabe 1:

Seite 3 zur Aufgabe 1

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 1:

Name:

Seite 4 zur Aufgabe 1

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 1:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 1:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 2 (12 Punkte).

(a) Gib (ohne Mehrfachnennung) alle Ideale von $\mathbb{Z}/(20)$ an. (7 Punkte)

(b) Welche davon sind prim und welche sind maximal? (5 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 2:

Seite 2 zur Aufgabe 2

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 3 (10 Punkte). Sei $p \in \mathbb{P}$. In welchen der folgenden Ringe ist das Polynom $X^3 + pX^2 + p^2$ (interpretiert als Element des jeweiligen Ringes) irreduzibel?

(a) $\mathbb{F}_p[X]$ (1 Punkt)

(b) $\mathbb{F}_{p^2}[X]$ (1 Punkt)

(c) $\mathbb{Z}[X]$ (3 Punkte)

(d) $\mathbb{Q}[X]$ (3 Punkte)

(e) $\mathbb{R}[X]$ (1 Punkt)

(f) $\mathbb{C}[X]$ (1 Punkt)

Hinweis: Je nachdem, welchen Lösungsweg man verfolgt, kann man (d) auch vor (c) lösen. Dann kann es sinnvoll sein, den Fall $p = 2$ gesondert zu behandeln.

Lösung zur Aufgabe 3:

Seite 2 zur Aufgabe 3

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 3:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 4**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 4 (12 Punkte). Seien $p, q \in \mathbb{P}$ und G eine Gruppe mit $\#G = pq$. Zeige, dass G einen Normalteiler N besitzt mit $\{1\} \neq N \neq G$.

Hinweis: Es kann sinnvoll sein, die Fälle $p < q$, $p = q$ und $p > q$ zu unterscheiden.

Lösung zur Aufgabe 4:

Seite 2 zur Aufgabe 4

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 4:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 5**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 5 (10 Punkte). Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$. Seien weiter $a, b \in K^\times$, $f := (X^2 - a)(X^2 - b) \in K[X]$ und L der Zerfällungskörper von f über K.

(a) Zeige, dass f separabel ist genau dann, wenn $a \neq b$. (4 Punkte)

(b) Seien $x, y \in \overline{K}$ mit $x^2 = a \neq b = y^2$. Zeige $L = K(x + y)$. (6 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 5:

Seite 2 zur Aufgabe 5

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 5:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 6**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 6 (22 Punkte). Seien $p \in \mathbb{P}$, $a \in \mathbb{F}_p^\times$, $f := X^p - X + a \in \mathbb{F}_p[X]$ und $b \in \overline{\mathbb{F}_p}$ mit $f(b) = 0$.

(a) Zeige $b \notin \mathbb{F}_p$. (2 Punkte)

(b) Zeige $f(X+1) = f$. (2 Punkte)

(c) Zeige $f = \prod_{c \in \mathbb{F}_p}(X - (b+c))$. (2 Punkte)

(d) Zeige, dass es ein $c \in \mathbb{F}_p^\times$ gibt derart, dass $b + c$ eine Nullstelle des Minimalpolynoms von b über $\mathbb{F}_p$ ist. (2 Punkte)

(e) Zeige, dass es ein $c \in \mathbb{F}_p^\times$ und ein $\sigma \in \operatorname{Aut}(\overline{\mathbb{F}_p}|\mathbb{F}_p)$ gibt mit $\sigma(b) = b + c$. (2 Punkte)

(f) Zeige, dass es für jedes $c \in \mathbb{F}_p$ ein $\sigma \in \operatorname{Aut}(\overline{\mathbb{F}_p}|\mathbb{F}_p)$ gibt mit $\sigma(b) = b + c$. (5 Punkte)

(g) Folgere, dass f irreduzibel in $\mathbb{F}_p[X]$ ist. (3 Punkte)

(h) Begründe, warum $\mathbb{F}_p(b)|\mathbb{F}_p$ eine endliche Galoiserweiterung ist. (2 Punkte)

(i) Welcher aus der Vorlesung bekannter Körper ist $\mathbb{F}_p(b)$? (2 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 6:

Seite 2 zur Aufgabe 6

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 6:

Name: **Seite 3 zur Aufgabe 6**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 6:

Seite 4 zur Aufgabe 6

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 6:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 7**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 7 (10 Punkte). Sei L der Zerfällungskörper von $f := X^4 + 5X^2 + 6 \in \mathbb{Q}[X]$ über $\mathbb{Q}$. Bestimme die

(a) Nullstellen von f in $\mathbb{C}$, (2 Punkte)

(b) Galoisgruppe von $L|\mathbb{Q}$, (4 Punkte)

(c) Zwischenkörper von $L|\mathbb{Q}$. (4 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 7:

Seite 2 zur Aufgabe 7