§9 Determinanten

§9.1 Definition und Eigenschaften von Determinanten

In diesem Kapitel sei stets K ein kommutativer Ring.

Definition

Sei $\sigma \in S_n$. Ein Fehlstand von σ ist ein Paar $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Definition

Sei $\sigma \in S_n$. Ein Fehlstand von σ ist ein Paar $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$. Hat σ genau m Fehlstände, so definieren wir das Vorzeichen (oder Signum) von σ durch $\operatorname{sgn}\sigma := (-1)^m \in \{-1,1\} \subseteq \mathbb{Z}$.

Definition

Sei $\sigma \in S_n$. Ein Fehlstand von σ ist ein Paar $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$. Hat σ genau m Fehlstände, so definieren wir das Vorzeichen (oder Signum) von σ durch $\operatorname{sgn} \sigma := (-1)^m \in \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$.

Beispiel

$\sigma\colon \{1, \ldots, 5\} \to \{1, \ldots, 5\},\ 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 3,\ 3 \mapsto 1,\ 4 \mapsto 5,\ 5 \mapsto 4$ hat genau die Fehlstände

Definition

Sei $\sigma \in S_n$. Ein Fehlstand von σ ist ein Paar $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$. Hat σ genau m Fehlstände, so definieren wir das Vorzeichen (oder Signum) von σ durch $\operatorname{sgn} \sigma := (-1)^m \in \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$.

Beispiel

$\sigma\colon \{1, \ldots, 5\} \to \{1, \ldots, 5\},\ 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 3,\ 3 \mapsto 1,\ 4 \mapsto 5,\ 5 \mapsto 4$ hat genau die Fehlstände $(1, 3)$, $(2, 3)$ und $(4, 5)$ und daher Vorzeichen

Definition

Sei $\sigma \in S_n$. Ein Fehlstand von σ ist ein Paar $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$. Hat σ genau m Fehlstände, so definieren wir das Vorzeichen (oder Signum) von σ durch $\operatorname{sgn} \sigma := (-1)^m \in \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$.

Beispiel

$\sigma \colon \{1, \ldots, 5\} \to \{1, \ldots, 5\},\ 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 3,\ 3 \mapsto 1,\ 4 \mapsto 5,\ 5 \mapsto 4$ hat genau die Fehlstände $(1, 3)$, $(2, 3)$ und $(4, 5)$ und daher Vorzeichen $(-1)^3 = -1$.

Definition

Sei $\sigma \in S_n$. Ein Fehlstand von σ ist ein Paar $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$. Hat σ genau m Fehlstände, so definieren wir das Vorzeichen (oder Signum) von σ durch $\operatorname{sgn}\sigma := (-1)^m \in \{-1,1\} \subseteq \mathbb{Z}$.

Beispiel

$\sigma\colon \{1,\dots,5\} \to \{1,\dots,5\},\ 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 3,\ 3 \mapsto 1,\ 4 \mapsto 5,\ 5 \mapsto 4$ hat genau die Fehlstände $(1,3)$, $(2,3)$ und $(4,5)$ und daher Vorzeichen $(-1)^3 = -1$.

Definition

Die Permutationen $$\tau_{k\ell}\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\},\ i \mapsto \begin{cases} \ell & \text{falls } i = k \\ k & \text{falls } i = \ell \\ i & \text{sonst} \end{cases}$$ mit $k,\ell \in \{1,\dots,n\}$ und $k \neq \ell$ heißen Transpositionen.

Satz

$\forall \sigma, \tau \in S_n : \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = (\operatorname{sgn} \sigma)(\operatorname{sgn} \tau)$

Beweis.

Ist $\varrho \in S_n$, so gilt

$$\operatorname{sgn} \varrho = \prod_{i<j} \frac{\varrho(j) - \varrho(i)}{j - i},$$

denn das Produkt auf der rechten Seite hat den Betrag 1

Satz

$\forall \sigma, \tau \in S_n : \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = (\operatorname{sgn} \sigma)(\operatorname{sgn} \tau)$

Beweis.

Ist $\varrho \in S_n$, so gilt

$$\operatorname{sgn} \varrho = \prod_{i<j} \frac{\varrho(j) - \varrho(i)}{j - i},$$

denn das Produkt auf der rechten Seite hat den Betrag 1 und dasselbe Vorzeichen wie $\operatorname{sgn} \varrho$.

Satz
$\forall \sigma, \tau \in S_n : \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = (\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau)$

Beweis.
Ist $\varrho \in S_n$, so gilt

$$\operatorname{sgn}\varrho = \prod_{i<j} \frac{\varrho(j) - \varrho(i)}{j - i},$$

denn das Produkt auf der rechten Seite hat den Betrag 1 und dasselbe Vorzeichen wie $\operatorname{sgn}\varrho$. Nun gilt

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{j - i}$$

Satz

$\forall \sigma, \tau \in S_n : \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = (\operatorname{sgn} \sigma)(\operatorname{sgn} \tau)$

Beweis.

Ist $\varrho \in S_n$, so gilt

$$\operatorname{sgn} \varrho = \prod_{i<j} \frac{\varrho(j) - \varrho(i)}{j - i},$$

denn das Produkt auf der rechten Seite hat den Betrag 1 und dasselbe Vorzeichen wie $\operatorname{sgn} \varrho$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) &= \prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{j - i} \\ &= \prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} \prod_{i<j} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} = (\operatorname{sgn} \sigma)(\operatorname{sgn} \tau), \end{aligned}$$

Satz

$\forall \sigma, \tau \in S_n : \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = (\operatorname{sgn} \sigma)(\operatorname{sgn} \tau)$

Beweis.

Ist $\varrho \in S_n$, so gilt

$$\operatorname{sgn} \varrho = \prod_{i<j} \frac{\varrho(j) - \varrho(i)}{j - i},$$

denn das Produkt auf der rechten Seite hat den Betrag 1 und dasselbe Vorzeichen wie $\operatorname{sgn} \varrho$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) &= \prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{j - i} \\ &= \prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} \prod_{i<j} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} = (\operatorname{sgn} \sigma)(\operatorname{sgn} \tau), \end{aligned}$$

denn in der Liste $(\tau(1), \tau(2)), (\tau(1), \tau(3)), \ldots, (\tau(n-1), \tau(n))$ taucht für jedes $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}$ entweder genau einmal (i, j) oder genau einmal (j, i) auf (ob ersteres oder letzteres ist egal!). $\square$

Korollar

Jede Transposition hat Vorzeichen -1.

Beweis.

Sei $\tau_{k\ell} \in S_n$ eine Transposition. Dann kann man $\sigma \in S_n$ wählen mit $\sigma(k) = 1$ und $\sigma(\ell) = 2$. Es gilt dann $\sigma \circ \tau_{k\ell} = \tau_{12} \circ \sigma$. Daraus folgt $(\operatorname{sgn} \sigma)(\operatorname{sgn} \tau_{k\ell}) = (\operatorname{sgn} \tau_{12})(\operatorname{sgn} \sigma)$ und somit $\operatorname{sgn} \tau_{k\ell} = \operatorname{sgn} \tau_{12}$. Nun hat aber τ_{12} nur den Fehlstand $(1, 2)$ und daher Vorzeichen -1.

Korollar

Jede Transposition hat Vorzeichen -1.

Beweis.

Sei $\tau_{k\ell} \in S_n$ eine Transposition. Dann kann man $\sigma \in S_n$ wählen mit $\sigma(k) = 1$ und $\sigma(\ell) = 2$. Es gilt dann $\sigma \circ \tau_{k\ell} = \tau_{12} \circ \sigma$. Daraus folgt $(\operatorname{sgn} \sigma)(\operatorname{sgn} \tau_{k\ell}) = (\operatorname{sgn} \tau_{12})(\operatorname{sgn} \sigma)$ und somit $\operatorname{sgn} \tau_{k\ell} = \operatorname{sgn} \tau_{12}$. Nun hat aber τ_{12} nur den Fehlstand $(1, 2)$ und daher Vorzeichen -1. □

Lemma

Jede Permutation $\sigma \in S_n$ *ist Hintereinanderschaltung endlich vieler Transpositionen.*

Beweis.

Dies entspricht der Tatsache, dass man n nebeneinander angeordnete Objekte durch paarweise Vertauschungen in jede beliebige Reihenfolge bringen kann. □

Satz

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $e \in K$ gibt es genau eine Funktion $\delta_e^{(n)} \colon K^{n \times n} \to K$ mit folgenden Eigenschaften:

Satz

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $e \in K$ gibt es genau eine Funktion $\delta_e^{(n)} \colon K^{n\times n} \to K$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) *Für alle i und $a_1, \dots, a_{i-1}, b, c, a_{i+1}, \dots, a_n \in K^n$ gilt*

$$\delta_e^{(n)} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ b+c \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \delta_e^{(n)} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ b \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \delta_e^{(n)} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ c \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Satz

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $e \in K$ gibt es genau eine Funktion $\delta_e^{(n)}\colon K^{n \times n} \to K$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) *$\delta_e^{(n)}$ ist additiv in den Zeilen.*

(b) *Für alle i, $a_1, \ldots, a_n \in K^n$ und $\lambda \in K$ gilt*

$$\delta_e^{(n)} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ \lambda a_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \delta_e^{(n)} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Satz

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $e \in K$ gibt es genau eine Funktion $\delta_e^{(n)} \colon K^{n \times n} \to K$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) *$\delta_e^{(n)}$ ist additiv in den Zeilen.*

(b) *$\delta_e^{(n)}$ ist homogen in den Zeilen.*

Satz

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $e \in K$ *gibt es genau eine Funktion* $\delta_e^{(n)} \colon K^{n \times n} \to K$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(ab) $\delta_e^{(n)}$ *ist linear in den Zeilen.*

Satz

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $e \in K$ *gibt es genau eine Funktion* $\delta_e^{(n)}\colon K^{n\times n} \to K$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(ab) $\delta_e^{(n)}$ *ist linear in den Zeilen.*

(c) *Für alle* $A \in K^{n\times n}$ *mit zwei identischen Zeilen gilt* $\delta_e^{(n)}(A) = 0$*.*

Satz

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $e \in K$ gibt es genau eine Funktion $\delta_e^{(n)} \colon K^{n \times n} \to K$ mit folgenden Eigenschaften:

(ab) $\delta_e^{(n)}$ *ist linear in den Zeilen.*

(c) *Für alle $A \in K^{n \times n}$ mit zwei identischen Zeilen gilt $\delta_e^{(n)}(A) = 0$.*

(d) $\delta_e^{(n)}(I_n) = e$

Satz

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $e \in K$ gibt es genau eine Funktion $\delta_e^{(n)} \colon K^{n\times n} \to K$ mit folgenden Eigenschaften:

(ab) *$\delta_e^{(n)}$ ist linear in den Zeilen.*

(c) *Für alle $A \in K^{n\times n}$ mit zwei identischen Zeilen gilt $\delta_e^{(n)}(A) = 0$.*

(d) $\delta_e^{(n)}(I_n) = e$

Es gilt die Leibniz-Formel

$$(*) \qquad \delta_e^{(n)}(A) = e \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

für alle $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in K^{n\times n}$.

Beweis.

Wir zeigen:

(1) Für jedes $\delta_e^{(n)}\colon K^{n\times n} \to K$ mit (a)–(d) gilt $(*)$.

(2) $\delta_e^{(n)}\colon K^{n\times n} \to K$ definiert durch $(*)$ erfüllt (a)–(d).

Beweis.

Wir zeigen:

(1) Für jedes $\delta_e^{(n)}\colon K^{n\times n} \to K$ mit (a)–(d) gilt $(*)$.

(2) $\delta_e^{(n)}\colon K^{n\times n} \to K$ definiert durch $(*)$ erfüllt (a)–(d).

Zu (1). Es habe $\delta := \delta_e^{(n)}\colon K^{n\times n} \to K$ die Eigenschaften (a)–(d). Geht B aus A durch Vertauschen zweier Zeilen hervor, so gilt $\delta(B) = -\delta(A)$, denn sind $a, b \in K^n$ diese zwei Zeilen, so gilt

$$0 \overset{(c)}{=} \delta \begin{pmatrix} \vdots \\ a+b \\ \vdots \\ a+b \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(a)}{=} \underbrace{\delta \begin{pmatrix} \vdots \\ a \\ \vdots \\ a \\ \vdots \end{pmatrix}}_{=0 \text{ nach (c)}} + \delta \begin{pmatrix} \vdots \\ a \\ \vdots \\ b \\ \vdots \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} \vdots \\ b \\ \vdots \\ a \\ \vdots \end{pmatrix} + \underbrace{\delta \begin{pmatrix} \vdots \\ b \\ \vdots \\ b \\ \vdots \end{pmatrix}}_{=0 \text{ nach (c)}} .$$

Beweis.

Wir zeigen:

(1) Für jedes $\delta_e^{(n)} \colon K^{n\times n} \to K$ mit (a)–(d) gilt $(*)$.

(2) $\delta_e^{(n)} \colon K^{n\times n} \to K$ definiert durch $(*)$ erfüllt (a)–(d).

Zu (1). Es habe $\delta := \delta_e^{(n)} \colon K^{n\times n} \to K$ die Eigenschaften (a)–(d). Geht B aus A durch Vertauschen zweier Zeilen hervor, so gilt $\delta(B) = -\delta(A)$. Daraus folgt daraus für alle $\sigma \in S_n$

$$\delta \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = (\operatorname{sgn}\sigma)\ \delta \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Beweis.

Wir zeigen:

(1) Für jedes $\delta_e^{(n)}\colon K^{n\times n} \to K$ mit (a)–(d) gilt $(*)$.

(2) $\delta_e^{(n)}\colon K^{n\times n} \to K$ definiert durch $(*)$ erfüllt (a)–(d).

Zu (1). Es habe $\delta := \delta_e^{(n)}\colon K^{n\times n} \to K$ die Eigenschaften (a)–(d). Geht B aus A durch Vertauschen zweier Zeilen hervor, so gilt $\delta(B) = -\delta(A)$.
Sei nun $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in K^{n\times n}$. Dann

$$\begin{aligned}
\delta(A) \quad &= \quad \delta\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}e_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}e_j \end{pmatrix} \overset{(a)}{\underset{(b)}{=}} \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_n=1}^n a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}\delta\begin{pmatrix} e_{j_1} \\ \vdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix} \\
&\overset{(c)}{=} \quad \sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}\delta\begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = e\sum_{\sigma\in S_n}(\operatorname{sgn}\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}.
\end{aligned}$$

Beweis.

Wir zeigen:

(1) Für jedes $\delta_e^{(n)}\colon K^{n\times n} \to K$ mit (a)–(d) gilt $(*)$.

(2) $\delta_e^{(n)}\colon K^{n\times n} \to K$ definiert durch $(*)$ erfüllt (a)–(d).

Zu (2). Für $\delta := \delta_e^{(n)}$ definiert durch $(*)$ sind (a),(b) und (d) unmittelbar einsichtig.

Beweis.

Wir zeigen:

(1) Für jedes $\delta_e^{(n)}\colon K^{n\times n} \to K$ mit (a)–(d) gilt $(*)$.

(2) $\delta_e^{(n)}\colon K^{n\times n} \to K$ definiert durch $(*)$ erfüllt (a)–(d).

Zu (2). Für $\delta := \delta_e^{(n)}$ definiert durch $(*)$ sind (a),(b) und (d) unmittelbar einsichtig. Um (c) zu zeigen, sei $A \in K^{n\times n}$ derart, dass die k-te Zeile und ℓ-te Zeile ($k \neq \ell$) von A übereinstimmen.

Beweis.
Wir zeigen:

(1) Für jedes $\delta_e^{(n)}\colon K^{n\times n} \to K$ mit (a)–(d) gilt $(*)$.

(2) $\delta_e^{(n)}\colon K^{n\times n} \to K$ definiert durch $(*)$ erfüllt (a)–(d).

Zu (2). Für $\delta := \delta_e^{(n)}$ definiert durch $(*)$ sind (a),(b) und (d) unmittelbar einsichtig. Um (c) zu zeigen, sei $A \in K^{n\times n}$ derart, dass die k-te Zeile und ℓ-te Zeile ($k \neq \ell$) von A übereinstimmen.
Definiere $A_n := \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sgn}\sigma = 1\}$ und beachte, dass

$$\Phi\colon A_n \to S_n \setminus A_n,\ \sigma \mapsto \sigma \circ \tau_{k\ell}$$

eine Bijektion ist.

Beweis.
Wir zeigen:

(1) Für jedes $\delta_e^{(n)} \colon K^{n\times n} \to K$ mit (a)–(d) gilt $(*)$.

(2) $\delta_e^{(n)} \colon K^{n\times n} \to K$ definiert durch $(*)$ erfüllt (a)–(d).

Zu (2). Für $\delta := \delta_e^{(n)}$ definiert durch $(*)$ sind (a),(b) und (d) unmittelbar einsichtig. Um (c) zu zeigen, sei $A \in K^{n\times n}$ derart, dass die k-te Zeile und ℓ-te Zeile ($k \neq \ell$) von A übereinstimmen.
Definiere $A_n := \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sgn}\sigma = 1\}$ und beachte, dass

$$\Phi \colon A_n \to S_n \setminus A_n,\ \sigma \mapsto \sigma \circ \tau_{k\ell}$$

eine Bijektion ist. Dann

$$\delta(A) \overset{(*)}{=} e \sum_{\sigma\in A_n} \left(a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} - a_{1(\sigma\circ\tau_{k\ell})(1)} \cdots a_{n(\sigma\circ\tau_{k\ell})(n)}\right)$$

Beweis.
Wir zeigen:

(1) Für jedes $\delta_e^{(n)}\colon K^{n\times n} \to K$ mit (a)–(d) gilt $(*)$.

(2) $\delta_e^{(n)}\colon K^{n\times n} \to K$ definiert durch $(*)$ erfüllt (a)–(d).

Zu (2). Für $\delta := \delta_e^{(n)}$ definiert durch $(*)$ sind (a),(b) und (d) unmittelbar einsichtig. Um (c) zu zeigen, sei $A \in K^{n\times n}$ derart, dass die k-te Zeile und ℓ-te Zeile ($k \neq \ell$) von A übereinstimmen.
Definiere $A_n := \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sgn}\sigma = 1\}$ und beachte, dass

$$\Phi\colon A_n \to S_n \setminus A_n,\ \sigma \mapsto \sigma \circ \tau_{k\ell}$$

eine Bijektion ist. Dann

$$\begin{aligned}
\delta(A) &\overset{(*)}{=} e \sum_{\sigma\in A_n} \left(a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} - a_{1(\sigma\circ\tau_{k\ell})(1)} \cdots a_{n(\sigma\circ\tau_{k\ell})(n)}\right) \\
&= e \sum_{\sigma\in A_n} \left(\prod_{i\in\{1,\dots,n\}\setminus\{k,\ell\}} a_{i\sigma(i)}\right) \overbrace{\left(a_{k\sigma(k)} a_{\ell\sigma(\ell)} - \underbrace{a_{k\sigma(\ell)}}_{=a_{\ell\sigma(\ell)}} \underbrace{a_{\ell\sigma(k)}}_{=a_{k\sigma(k)}}\right)}^{=0} = 0.
\end{aligned}$$

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{n \times n}$. Dann heißt

$$\det(A) := \delta_1^{(n)}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

die Determinante von A.

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in K^{n \times n}$. Dann heißt

$$\det(A) := \delta_1^{(n)}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

die Determinante von A.

Beispiel

(a) $\det() = \delta_1^{(0)}() \overset{()=I_0}{=} \delta_1^{(0)}(I_0) = 1$

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{n \times n}$. Dann heißt

$$\det(A) := \delta_1^{(n)}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

die Determinante von A.

Beispiel

(a) $\det() = \delta_1^{(0)}() \overset{()=I_0}{=} \delta_1^{(0)}(I_0) = 1$

(b) Die Determinante einer Matrix, die eine Nullzeile enthält, ist null. Insbesondere gilt für die Nullmatrix $0 \in K^{n \times n}$ im Fall $n \geq 1$, dass $\det(0) = 0$.

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in K^{n \times n}$. Dann heißt

$$\det(A) := \delta_1^{(n)}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

die Determinante von A.

Beispiel

(a) $\det() = \delta_1^{(0)}() \overset{()=I_0}{=} \delta_1^{(0)}(I_0) = 1$

(b) Die Determinante einer Matrix, die eine Nullzeile enthält, ist null. Insbesondere gilt für die Nullmatrix $0 \in K^{n \times n}$ im Fall $n \ge 1$, dass $\det(0) = 0$.

(c) $\det(a) = a$ für alle $a \in K$

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{n \times n}$. Dann heißt

$$\det(A) := \delta_1^{(n)}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

die Determinante von A.

Beispiel

(a) $\det() = \delta_1^{(0)}() \overset{()=I_0}{=} \delta_1^{(0)}(I_0) = 1$

(b) Die Determinante einer Matrix, die eine Nullzeile enthält, ist null. Insbesondere gilt für die Nullmatrix $0 \in K^{n \times n}$ im Fall $n \geq 1$, dass $\det(0) = 0$.

(c) $\det(a) = a$ für alle $a \in K$

(d) Sind $a, b, c, d \in K$, so $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

Beispiel

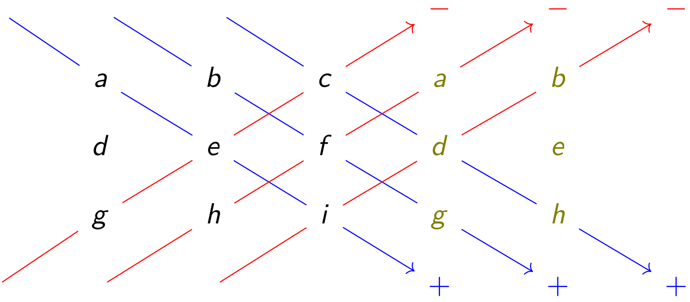
(c) Sind $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in K$, so gilt die Regel von Sarrus

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg.$$

Beispiel

(c) Sind $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in K$, so gilt die Regel von Sarrus

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg.$$



Satz

Sei $A \in K^{n\times n}$ von der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \ast \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_m} \end{pmatrix} \text{ mit quadratischen Matrizen } A_i.$$

Dann gilt $\det A = \prod_{i=1}^{m} \det A_i$.

Satz

Sei $A \in K^{n\times n}$ von der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \text{\huge$*$} \\ & & \ddots & \\ \text{\huge$0$} & & & \boxed{A_m} \end{pmatrix}$$ *mit quadratischen Matrizen A_i.*

Dann gilt $\det A = \prod_{i=1}^{m} \det A_i$. *Insbesondere ist die Determinante einer Matrix A in* *oberer Dreiecksgestalt* $A = \begin{pmatrix} a_1 & & \text{\large$*$} \\ & \ddots & \\ \text{\large$0$} & & a_n \end{pmatrix}$ *das Produkt ihrer* *Diagonaleinträge*, *das heißt* $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_i$.

Satz

Sei $A \in K^{n \times n}$ von der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \ast \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_m} \end{pmatrix}$$ *mit quadratischen Matrizen A_i.*

Dann gilt $\det A = \prod_{i=1}^{m} \det A_i$.

Beweis.

Es reicht, für $A = \left(\begin{array}{c|c} B & \ast \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ mit $B \in K^{r \times r}$ und $C \in K^{t \times t}$ zu zeigen

$$\det A = (\det B)(\det C),$$

denn der Rest folgt dann mit Induktion... □

Beweis.

Es reicht, für $A = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ mit $B \in K^{r \times r}$ und $C \in K^{t \times t}$ zu zeigen

$$\det A = (\det B)(\det C).$$

Beweis.

Es reicht, für $A = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ mit $B \in K^{r\times r}$ und $C \in K^{t\times t}$ zu zeigen

$$\det A = (\det B)(\det C).$$

Wegen der Nulleinträge links unten sind in der Leibniz-Formel nur diejenigen Summanden ungleich null, die zu einem $\sigma \in S_n$ gehören, für welches es $\varrho \in S_r$ und $\tau \in S_t$ gibt mit $\sigma(i) = \varrho(i)$ für $i \in \{1, \dots, r\}$ und $\sigma(i) = \tau(i-r) + r$ für $i \in \{r+1, \dots, n\}$ (beachte $r + t = n$).

Beweis.

Es reicht, für $A = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ mit $B \in K^{r\times r}$ und $C \in K^{t\times t}$ zu zeigen

$$\det A = (\det B)(\det C).$$

Wegen der Nulleinträge links unten sind in der Leibniz-Formel nur diejenigen Summanden ungleich null, die zu einem $\sigma \in S_n$ gehören, für welches es $\varrho \in S_r$ und $\tau \in S_t$ gibt mit $\sigma(i) = \varrho(i)$ für $i \in \{1, \dots, r\}$ und $\sigma(i) = \tau(i - r) + r$ für $i \in \{r + 1, \dots, n\}$ (beachte $r + t = n$). Dabei ist die Anzahl der Fehlstände von σ offensichtlich die Summe der Anzahl der Fehlstände von ϱ und τ, weswegen $\operatorname{sgn} \sigma = (\operatorname{sgn} \varrho)(\operatorname{sgn} \tau)$ gilt.

Beweis.

Es reicht, für $A = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ mit $B \in K^{r\times r}$ und $C \in K^{t\times t}$ zu zeigen

$$\det A = (\det B)(\det C).$$

Wegen der Nulleinträge links unten sind in der Leibniz-Formel nur diejenigen Summanden ungleich null, die zu einem $\sigma \in S_n$ gehören, für welches es $\varrho \in S_r$ und $\tau \in S_t$ gibt mit $\sigma(i) = \varrho(i)$ für $i \in \{1, \ldots, r\}$ und $\sigma(i) = \tau(i - r) + r$ für $i \in \{r + 1, \ldots, n\}$ (beachte $r + t = n$). Dabei ist die Anzahl der Fehlstände von σ offensichtlich die Summe der Anzahl der Fehlstände von ϱ und τ, weswegen $\operatorname{sgn} \sigma = (\operatorname{sgn} \varrho)(\operatorname{sgn} \tau)$ gilt. Es folgt

$$\det A = \sum_{\varrho \in S_r} \sum_{\tau \in S_t} (\operatorname{sgn} \varrho)(\operatorname{sgn} \tau) b_{1\varrho(1)} \cdots b_{r\varrho(r)} c_{1\tau(1)} \cdots c_{t\tau(t)}$$

wobei $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq r}$ und $C = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq t}$.

$\square$

Beweis.

Es reicht, für $A = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ mit $B \in K^{r\times r}$ und $C \in K^{t\times t}$ zu zeigen

$$\det A = (\det B)(\det C).$$

Wegen der Nulleinträge links unten sind in der Leibniz-Formel nur diejenigen Summanden ungleich null, die zu einem $\sigma \in S_n$ gehören, für welches es $\varrho \in S_r$ und $\tau \in S_t$ gibt mit $\sigma(i) = \varrho(i)$ für $i \in \{1, \ldots, r\}$ und $\sigma(i) = \tau(i-r) + r$ für $i \in \{r+1, \ldots, n\}$ (beachte $r + t = n$). Dabei ist die Anzahl der Fehlstände von σ offensichtlich die Summe der Anzahl der Fehlstände von ϱ und τ, weswegen $\operatorname{sgn}\sigma = (\operatorname{sgn}\varrho)(\operatorname{sgn}\tau)$ gilt. Es folgt

$$\det A = \left(\sum_{\varrho\in S_r} (\operatorname{sgn}\varrho) b_{1\varrho(1)} \cdots b_{r\varrho(r)}\right)\left(\sum_{\tau\in S_t} (\operatorname{sgn}\tau) c_{1\tau(1)} \cdots c_{t\tau(t)}\right),$$

wobei $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le r}$ und $C = (c_{ij})_{1\le i,j\le t}$.

$\square$

Beweis.

Es reicht, für $A = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ mit $B \in K^{r\times r}$ und $C \in K^{t\times t}$ zu zeigen

$$\det A = (\det B)(\det C).$$

Wegen der Nulleinträge links unten sind in der Leibniz-Formel nur diejenigen Summanden ungleich null, die zu einem $\sigma \in S_n$ gehören, für welches es $\varrho \in S_r$ und $\tau \in S_t$ gibt mit $\sigma(i) = \varrho(i)$ für $i \in \{1, \dots, r\}$ und $\sigma(i) = \tau(i-r) + r$ für $i \in \{r+1, \dots, n\}$ (beachte $r + t = n$). Dabei ist die Anzahl der Fehlstände von σ offensichtlich die Summe der Anzahl der Fehlstände von ϱ und τ, weswegen $\operatorname{sgn} \sigma = (\operatorname{sgn} \varrho)(\operatorname{sgn} \tau)$ gilt. Es folgt

$$\det A = \left(\sum_{\varrho \in S_r} (\operatorname{sgn} \varrho) b_{1\varrho(1)} \cdots b_{r\varrho(r)}\right) \left(\sum_{\tau \in S_t} (\operatorname{sgn} \tau) c_{1\tau(1)} \cdots c_{t\tau(t)}\right),$$

wobei $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le r}$ und $C = (c_{ij})_{1 \le i,j \le t}$.

Daher gilt $\det A \overset{(*)}{=} (\det B)(\det C)$. □

Bemerkung

Sei K ein Körper. Zur Berechnung von Determinanten ist es oft am effizientesten, die Matrix durch Zeilenoperationen auf obere Dreiecksgestalt (zum Beispiel Stufenform) zu bringen und den Effekt auf die Determinante dabei mitzuprotokollieren. Für die beiden elementaren Zeilenoperationen gilt:

(a) Sind $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \overset{Z_i \leftarrow Z_i + \lambda Z_j}{\sim} B$ $(i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j, \lambda \in K)$, so gilt $\det A = \det B$.

Bemerkung

Sei K ein Körper. Zur Berechnung von Determinanten ist es oft am effizientesten, die Matrix durch Zeilenoperationen auf obere Dreiecksgestalt (zum Beispiel Stufenform) zu bringen und den Effekt auf die Determinante dabei mitzuprotokollieren. Für die beiden elementaren Zeilenoperationen gilt:

(a) Sind $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \overset{Z_i \leftarrow Z_i + \lambda Z_j}{\sim} B$ $(i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j, \lambda \in K)$, so gilt $\det A = \det B$.

(b) Sind $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \overset{Z_i \leftarrow \lambda Z_i}{\sim} B$ $(i \in \{1, \ldots, n\}, \lambda \in K^\times)$, so gilt $\det A = \frac{1}{\lambda} \det B$.

Bemerkung

Sei K ein Körper. Zur Berechnung von Determinanten ist es oft am effizientesten, die Matrix durch Zeilenoperationen auf obere Dreiecksgestalt (zum Beispiel Stufenform) zu bringen und den Effekt auf die Determinante dabei mitzuprotokollieren. Für die beiden elementaren Zeilenoperationen gilt:

(a) Sind $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \overset{Z_i \leftarrow Z_i + \lambda Z_j}{\sim} B$ $(i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j, \lambda \in K)$, so gilt $\det A = \det B$.

(b) Sind $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \overset{Z_i \leftarrow \lambda Z_i}{\sim} B$ $(i \in \{1, \ldots, n\}, \lambda \in K^\times)$, so gilt $\det A = \frac{1}{\lambda} \det B$.

Daraus ergibt sich der Effekt auf andere Zeilenoperationen:

(c) Sind $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \overset{Z_i \leftrightarrow Z_j}{\sim} B$ $(i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j)$, so gilt $\det A = -\det B$

Bemerkung

Sei K ein Körper. Zur Berechnung von Determinanten ist es oft am effizientesten, die Matrix durch Zeilenoperationen auf obere Dreiecksgestalt (zum Beispiel Stufenform) zu bringen und den Effekt auf die Determinante dabei mitzuprotokollieren. Für die beiden elementaren Zeilenoperationen gilt:

(a) Sind $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \overset{Z_i \leftarrow Z_i + \lambda Z_j}{\sim} B$ $(i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j, \lambda \in K)$, so gilt $\det A = \det B$.

(b) Sind $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \overset{Z_i \leftarrow \lambda Z_i}{\sim} B$ $(i \in \{1, \ldots, n\}, \lambda \in K^\times)$, so gilt $\det A = \frac{1}{\lambda} \det B$.

Daraus ergibt sich der Effekt auf andere Zeilenoperationen:

(c) Sind $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \overset{Z_i \leftrightarrow Z_j}{\sim} B$ $(i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j)$, so gilt $\det A = -\det B$

(d) Sind $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \overset{Z_i \leftarrow \sum_{j=1}^n \lambda_j Z_j}{\sim} B$ $(i \in \{1, \ldots, n\}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K, \lambda_i \neq 0)$, so gilt $\det A = \frac{1}{\lambda_i} \det B$.

Beispiel

Sei K ein Körper, schreibe $2 := 1+1 \in K$ und so weiter. Gelte $3 \in K^\times$.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Sei K ein Körper, schreibe $2 := 1 + 1 \in K$ und so weiter. Gelte $3 \in K^\times$.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_1}{\overset{Z_2 \leftarrow Z_2 - 2Z_1}{\sim}}$$

Beispiel

Sei K ein Körper, schreibe $2 := 1+1 \in K$ und so weiter. Gelte $3 \in K^\times$.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_1}{\overset{Z_2 \leftarrow Z_2 - 2Z_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Sei K ein Körper, schreibe $2 := 1 + 1 \in K$ und so weiter. Gelte $3 \in K^\times$.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_1}{\overset{Z_2 \leftarrow Z_2 - 2Z_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Z_4 \leftarrow \tfrac{1}{3} Z_4}$$

$$\underset{Z_3 \leftarrow Z_3 + 3Z_2}{\overset{Z_4 \leftarrow Z_4 - Z_3}{\sim}}$$

Beispiel

Sei K ein Körper, schreibe $2 := 1 + 1 \in K$ und so weiter. Gelte $3 \in K^\times$.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_1}{\overset{Z_2 \leftarrow Z_2 - 2Z_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{Z_3 \leftarrow Z_3 + 3Z_2}{\overset{\substack{Z_4 \leftarrow \frac{1}{3} Z_4 \\ Z_4 \leftarrow Z_4 - Z_3}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Sei K ein Körper, schreibe $2 := 1+1 \in K$ und so weiter. Gelte $3 \in K^\times$.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_1}{\overset{Z_2 \leftarrow Z_2 - 2Z_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{Z_3 \leftarrow Z_3 + 3Z_2}{\overset{\substack{Z_4 \leftarrow \frac{1}{3} Z_4 \\ Z_4 \leftarrow Z_4 - Z_3}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{Z_4 \leftarrow Z_4 - 6Z_3}{\overset{\boxed{Z_3 \leftrightarrow Z_4}}{\sim}}$$

Beispiel

Sei K ein Körper, schreibe $2 := 1 + 1 \in K$ und so weiter. Gelte $3 \in K^\times$.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_1}{\overset{Z_2 \leftarrow Z_2 - 2Z_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{Z_3 \leftarrow Z_3 + 3Z_2}{\overset{\substack{Z_4 \leftarrow \frac{1}{3} Z_4 \\ Z_4 \leftarrow Z_4 - Z_3}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{Z_4 \leftarrow Z_4 - 6Z_3}{\overset{\boxed{Z_3 \leftrightarrow Z_4}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} =: B$$

Beispiel

Sei K ein Körper, schreibe $2 := 1+1 \in K$ und so weiter. Gelte $3 \in K^\times$.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_1}{\overset{Z_2 \leftarrow Z_2 - 2Z_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{Z_3 \leftarrow Z_3 + 3Z_2}{\overset{Z_4 \leftarrow \frac{1}{3} Z_4 \quad Z_4 \leftarrow Z_4 - Z_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{Z_4 \leftarrow Z_4 - 6Z_3}{\overset{\boxed{Z_3 \leftrightarrow Z_4}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} =: B$$

Also $\det A = \frac{1}{\frac{1}{3}} \boxed{(-1)} \det B = (-3)(-9) = 27$.

Bemerkung

Sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$. Ist A in Stufenform, so ist der Rang von A gleich der Anzahl der Stufen von A und die Determinante von A gleich dem Produkt der Diagonaleinträge von A.

Bemerkung

Sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$. Ist A in Stufenform, so ist der Rang von A gleich der Anzahl der Stufen von A und die Determinante von A gleich dem Produkt der Diagonaleinträge von A. Es gilt dann

$$\operatorname{rank} A = n \iff \det A \neq 0.$$

Bemerkung

Sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$. Ist A in Stufenform, so ist der Rang von A gleich der Anzahl der Stufen von A und die Determinante von A gleich dem Produkt der Diagonaleinträge von A. Es gilt dann

$$\operatorname{rank} A = n \iff \det A \neq 0.$$

Dies bleibt richtig für beliebiges $A \in K^{n \times n}$, denn durch Zeilenoperationen ändert sich der Rang gar nicht und die Determinante nur um einen Faktor $\neq 0$.

Bemerkung

Sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$. Ist A in Stufenform, so ist der Rang von A gleich der Anzahl der Stufen von A und die Determinante von A gleich dem Produkt der Diagonaleinträge von A. Es gilt dann

$$\operatorname{rank} A = n \iff \det A \neq 0.$$

Dies bleibt richtig für beliebiges $A \in K^{n \times n}$, denn durch Zeilenoperationen ändert sich der Rang gar nicht und die Determinante nur um einen Faktor $\neq 0$. Wegen A invertierbar $\overset{8.1.16}{\iff}$ $\operatorname{rank} A = n$ und $K^\times = K \setminus \{0\}$ gilt also auch

$$A \text{ invertierbar} \iff \det A \in K^\times,$$

Bemerkung

Sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$. Ist A in Stufenform, so ist der Rang von A gleich der Anzahl der Stufen von A und die Determinante von A gleich dem Produkt der Diagonaleinträge von A. Es gilt dann

$$\operatorname{rank} A = n \iff \det A \neq 0.$$

Dies bleibt richtig für beliebiges $A \in K^{n \times n}$, denn durch Zeilenoperationen ändert sich der Rang gar nicht und die Determinante nur um einen Faktor $\neq 0$. Wegen A invertierbar $\overset{8.1.16}{\iff}$ $\operatorname{rank} A = n$ und $K^{\times} = K \setminus \{0\}$ gilt also auch

$$A \text{ invertierbar} \iff \det A \in K^{\times},$$

was wir in §9.2 sogar beweisen werden, wenn K nur ein kommutativer Ring statt ein Körper ist.

Satz (Determinantenproduktsatz)

Für alle $A, B \in K^{n \times n}$ gilt $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

Beweis.

$\square$

Satz (Determinantenproduktsatz)

Für alle $A, B \in K^{n\times n}$ gilt $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

Beweis.

Sei $B \in K^{n\times n}$ fest und betrachte

$$f\colon K^{n\times n} \to K, \qquad A \mapsto \det(AB) \qquad \text{sowie}$$
$$g\colon K^{n\times n} \to K, \qquad A \mapsto (\det A)(\det B).$$

Zu zeigen ist $f = g$.

$\square$

Satz (Determinantenproduktsatz)

Für alle $A, B \in K^{n\times n}$ gilt $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

Beweis.

Sei $B \in K^{n\times n}$ fest und betrachte

$$\begin{aligned} f\colon K^{n\times n} &\to K, \qquad A \mapsto \det(AB) \qquad \text{sowie} \\ g\colon K^{n\times n} &\to K, \qquad A \mapsto (\det A)(\det B). \end{aligned}$$

Zu zeigen ist $f = g$. Wir zeigen $f = \delta^{(n)}_{\det B} = g$, indem wir die Eigenschaften (a)–(d) von $\delta^{(n)}_{\det B}$ für f und g nachweisen. Für g sind diese Eigenschaften klar. Für f rechnen wir sie nach.

□

Satz (Determinantenproduktsatz)

Für alle $A, B \in K^{n\times n}$ gilt $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

Beweis.

Sei $B \in K^{n\times n}$. Zu zeigen: $f\colon K^{n\times n} \to K,\ A \mapsto \det(AB)$ erfüllt (a)–(d).
Zum Beispiel für (a):

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ b+c \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} B\right) =$$

für alle $a_i, b, c \in K^n$.

$\square$

Satz (Determinantenproduktsatz)

Für alle $A, B \in K^{n\times n}$ gilt $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

Beweis.

Sei $B \in K^{n\times n}$. Zu zeigen: $f\colon K^{n\times n} \to K,\ A \mapsto \det(AB)$ erfüllt (a)–(d).
Zum Beispiel für (a):

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ b+c \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} B\right) = \det\begin{pmatrix} a_1 B \\ \vdots \\ a_{i-1}B \\ (b+c)B \\ a_{i+1}B \\ \vdots \\ a_n B \end{pmatrix}$$

für alle $a_i, b, c \in K^n$.

$\square$

Satz (Determinantenproduktsatz)

Für alle $A, B \in K^{n\times n}$ gilt $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

Beweis.

Sei $B \in K^{n\times n}$. Zu zeigen: $f\colon K^{n\times n} \to K,\ A \mapsto \det(AB)$ erfüllt (a)–(d).
Zum Beispiel für (a):

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ b+c \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} B\right) = \det\begin{pmatrix} a_1 B \\ \vdots \\ a_{i-1}B \\ bB + cB \\ a_{i+1}B \\ \vdots \\ a_n B \end{pmatrix}$$

für alle $a_i, b, c \in K^n$.

$\square$

Satz (Determinantenproduktsatz)

Für alle $A, B \in K^{n\times n}$ gilt $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

Beweis.

Sei $B \in K^{n\times n}$. Zu zeigen: $f\colon K^{n\times n} \to K,\ A \mapsto \det(AB)$ erfüllt (a)–(d).
Zum Beispiel für (a):

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ b+c \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} B\right) = \det\begin{pmatrix} a_1 B \\ \vdots \\ a_{i-1}B \\ bB + cB \\ a_{i+1}B \\ \vdots \\ a_n B \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1 B \\ \vdots \\ a_{i-1}B \\ bB \\ a_{i+1}B \\ \vdots \\ a_n B \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_1 B \\ \vdots \\ a_{i-1}B \\ cB \\ a_{i+1}B \\ \vdots \\ a_n B \end{pmatrix}$$

für alle $a_i, b, c \in K^n$.

□

Definition

Zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ heißen ähnlich, in Zeichen $A \approx B$, wenn es eine invertierbare Matrix $P \in K^{n \times n}$ gibt mit $A = P^{-1}BP$.

Definition

Zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ heißen ähnlich, in Zeichen $A \approx B$, wenn es eine invertierbare Matrix $P \in K^{n \times n}$ gibt mit $A = P^{-1}BP$.

Proposition

Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $K^{n \times n}$.

Definition

Zwei Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ heißen ähnlich, in Zeichen $A \approx B$, wenn es eine invertierbare Matrix $P \in K^{n\times n}$ gibt mit $A = P^{-1}BP$.

Proposition

Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $K^{n\times n}$.

Beweis.

Gemäß 1.3.1(b) ist zu zeigen:

(a) $\forall A \in K^{n\times n} : A \approx A$

(b) $\forall A, B \in K^{n\times n} : (A \approx B \implies B \approx A)$

(c) $\forall A, B, C \in K^{n\times n} : ((A \approx B \,\&\, B \approx C) \implies A \approx C)$

Definition

Zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ heißen ähnlich, in Zeichen $A \approx B$, wenn es eine invertierbare Matrix $P \in K^{n \times n}$ gibt mit $A = P^{-1}BP$.

Proposition

Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $K^{n \times n}$.

Beweis.

Gemäß 1.3.1(b) ist zu zeigen:

(a) $\forall A \in K^{n \times n} : A \approx A$

(b) $\forall A, B \in K^{n \times n} : (A \approx B \implies B \approx A)$

(c) $\forall A, B, C \in K^{n \times n} : ((A \approx B \,\&\, B \approx C) \implies A \approx C)$

Zu (a). $A = I_n^{-1} A I_n$ für alle $A \in K^{n \times n}$

Definition

Zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ heißen ähnlich, in Zeichen $A \approx B$, wenn es eine invertierbare Matrix $P \in K^{n \times n}$ gibt mit $A = P^{-1}BP$.

Proposition

Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $K^{n \times n}$.

Beweis.

Gemäß 1.3.1(b) ist zu zeigen:

(a) $\forall A \in K^{n \times n} : A \approx A$

(b) $\forall A, B \in K^{n \times n} : (A \approx B \implies B \approx A)$

(c) $\forall A, B, C \in K^{n \times n} : ((A \approx B \,\&\, B \approx C) \implies A \approx C)$

Zu (a). $A = I_n^{-1} A I_n$ für alle $A \in K^{n \times n}$

Zu (b). Ist $P \in K^{n \times n}$ invertierbar mit $A = P^{-1}BP$, so ist auch P^{-1} invertierbar und $B = PAP^{-1} = (P^{-1})^{-1}AP^{-1}$.

Definition

Zwei Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ heißen ähnlich, in Zeichen $A \approx B$, wenn es eine invertierbare Matrix $P \in K^{n\times n}$ gibt mit $A = P^{-1}BP$.

Proposition

Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $K^{n\times n}$.

Beweis.

Gemäß 1.3.1(b) ist zu zeigen:

(a) $\forall A \in K^{n\times n} : A \approx A$

(b) $\forall A, B \in K^{n\times n} : (A \approx B \implies B \approx A)$

(c) $\forall A, B, C \in K^{n\times n} : ((A \approx B \,\&\, B \approx C) \implies A \approx C)$

Zu (a). $A = I_n^{-1}AI_n$ für alle $A \in K^{n\times n}$

Zu (b). Ist $P \in K^{n\times n}$ invertierbar mit $A = P^{-1}BP$, so ist auch P^{-1} invertierbar und $B = PAP^{-1} = (P^{-1})^{-1}AP^{-1}$.

Zu (c). Sind $P, Q \in K^{n\times n}$ invertierbar mit $A = P^{-1}BP$ und $B = Q^{-1}CQ$, so ist auch QP invertierbar mit $(QP)^{-1} = P^{-1}Q^{-1}$ (denn $P^{-1}Q^{-1}QP = I_n = QPP^{-1}Q^{-1}$) und es gilt $A = P^{-1}Q^{-1}BQP = (QP)^{-1}B(QP)$. $\square$

Satz

Sind $A, B \in K^{n \times n}$ *mit* $A \approx B$*, so gilt* $\det A = \det B$.

Satz

Sind $A, B \in K^{n\times n}$ *mit* $A \approx B$*, so gilt* $\det A = \det B$*.*

Beweis.

Seien $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \approx B$. Wähle $P \in K^{n\times n}$ invertierbar mit $A = P^{-1}BP$.

Satz

Sind $A, B \in K^{n \times n}$ *mit* $A \approx B$, *so gilt* $\det A = \det B$.

Beweis.

Seien $A, B \in K^{n \times n}$ mit $A \approx B$. Wähle $P \in K^{n \times n}$ invertierbar mit $A = P^{-1}BP$. Dann $\det A = (\det(P^{-1}))(\det B)(\det P)$ und $1 = \det I_n \overset{7.2.9}{=} \det(P^{-1}P) = (\det(P^{-1}))(\det P)$.

Satz

Sind $A, B \in K^{n\times n}$ *mit* $A \approx B$*, so gilt* $\det A = \det B$*.*

Beweis.

Seien $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \approx B$. Wähle $P \in K^{n\times n}$ invertierbar mit $A = P^{-1}BP$. Dann $\det A = (\det(P^{-1}))(\det B)(\det P)$ und $1 = \det I_n \overset{7.2.9}{=} \det(P^{-1}P) = (\det(P^{-1}))(\det P)$. □

Proposition

Sei f *ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen VRs mit geordneten Basen* $\underline{v}$ *und* $\underline{w}$*. Dann* $M(f, \underline{v}) \approx M(f, \underline{w})$*.*

Satz

Sind $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \approx B$, so gilt $\det A = \det B$.

Beweis.

Seien $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \approx B$. Wähle $P \in K^{n\times n}$ invertierbar mit $A = P^{-1}BP$. Dann $\det A = (\det(P^{-1}))(\det B)(\det P)$ und $1 = \det I_n \overset{7.2.9}{=} \det(P^{-1}P) = (\det(P^{-1}))(\det P)$. $\square$

Proposition

Sei f ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen VRs mit geordneten Basen $\underline{v}$ und $\underline{w}$. Dann $M(f, \underline{v}) \approx M(f, \underline{w})$.

Beweis.

Es gilt $M(f, \underline{v}) \overset{7.2.5}{=} M(\underline{w}, \underline{v})M(f, \underline{w})M(\underline{v}, \underline{w})$ und

$$I_n \underset{7.2.10}{\overset{7.1.10}{=}} M(\underline{v}, \underline{v}) \overset{7.2.5}{=} M(\underline{w}, \underline{v})M(\underline{v}, \underline{w}),$$

Satz

Sind $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \approx B$, so gilt $\det A = \det B$.

Beweis.

Seien $A, B \in K^{n\times n}$ mit $A \approx B$. Wähle $P \in K^{n\times n}$ invertierbar mit $A = P^{-1}BP$. Dann $\det A = (\det(P^{-1}))(\det B)(\det P)$ und $1 = \det I_n \overset{7.2.9}{=} \det(P^{-1}P) = (\det(P^{-1}))(\det P)$. □

Proposition

Sei f ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen VRs mit geordneten Basen $\underline{v}$ und $\underline{w}$. Dann $M(f, \underline{v}) \approx M(f, \underline{w})$.

Beweis.

Es gilt $M(f, \underline{v}) \overset{7.2.5}{=} M(\underline{w}, \underline{v})M(f, \underline{w})M(\underline{v}, \underline{w})$ und

$$I_n \underset{7.2.10}{\overset{7.1.10}{=}} M(\underline{v}, \underline{v}) \overset{7.2.5}{=} M(\underline{w}, \underline{v})M(\underline{v}, \underline{w}),$$

das heißt $M(\underline{w}, \underline{v}) = M(\underline{v}, \underline{w})^{-1}$ [$\rightarrow$7.2.13]. Mit $P := M(\underline{v}, \underline{w})$ gilt also

$$M(f, \underline{v}) \overset{7.2.5}{=} P^{-1}M(f, \underline{w})P.$$

Definition

Sei f ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen VRs V. Dann ist die Determinante von f definiert als $\det f := \det M(f, \underline{v})$, wobei $\underline{v}$ eine beliebig gewählte geordnete Basis von V ist.

Definition

Sei f ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen VRs V. Dann ist die Determinante von f definiert als $\det f := \det M(f, \underline{v})$, wobei $\underline{v}$ eine beliebig gewählte geordnete Basis von V ist.

Definition

Ist $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \in K^{m \times n}$, so heißt

$$A^T := (a_{ij})_{1 \le j \le n, 1 \le i \le m} \in K^{n \times m}$$

die zu A transponierte Matrix.

Definition

Sei f ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen VRs V. Dann ist die Determinante von f definiert als $\det f := \det M(f, \underline{v})$, wobei $\underline{v}$ eine beliebig gewählte geordnete Basis von V ist.

Definition

Ist $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in K^{m \times n}$, so heißt

$$A^T := (a_{ij})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m} \in K^{n \times m}$$

die zu A transponierte Matrix.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition

$\forall A \in K^{n\times n} : \det A = \det(A^T)$

Proposition

$\forall A \in K^{n\times n} : \det A = \det(A^T)$

Beweis.

Wegen $\sigma = (\sigma^{-1})^{-1}$ für alle $\sigma \in S_n$ ist $\Phi\colon S_n \to S_n, \sigma \mapsto \sigma^{-1}$ bijektiv.

Proposition

$\forall A \in K^{n \times n} : \det A = \det(A^T)$

Beweis.

Wegen $\sigma = (\sigma^{-1})^{-1}$ für alle $\sigma \in S_n$ ist $\Phi \colon S_n \to S_n, \sigma \mapsto \sigma^{-1}$ bijektiv.
Es gilt

$$\det(A^T) \overset{(*)}{=} \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

Proposition

$\forall A \in K^{n\times n} : \det A = \det(A^T)$

Beweis.

Wegen $\sigma = (\sigma^{-1})^{-1}$ für alle $\sigma \in S_n$ ist $\Phi\colon S_n \to S_n, \sigma \mapsto \sigma^{-1}$ bijektiv.
Es gilt

$$\begin{aligned}\det(A^T) &\overset{(*)}{=} \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}\\ &\overset{\Phi\text{ bijektiv}}{=} \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})) a_{\sigma^{-1}(1)1}\cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}\end{aligned}$$

Proposition

$\forall A \in K^{n\times n} : \det A = \det(A^T)$

Beweis.

Wegen $\sigma = (\sigma^{-1})^{-1}$ für alle $\sigma \in S_n$ ist $\Phi\colon S_n \to S_n, \sigma \mapsto \sigma^{-1}$ bijektiv.
Es gilt

$$\begin{aligned}
\det(A^T) &\overset{(*)}{=} \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n} \\
&\overset{\Phi \text{ bijektiv}}{=} \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})) a_{\sigma^{-1}(1)1}\cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} \\
&\underset{\text{für } \sigma \in S_n}{\overset{\sigma \text{ bijektiv}}{=}} \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})) a_{\sigma^{-1}(\sigma(1))\sigma(1)}\cdots a_{\sigma^{-1}(\sigma(n))\sigma(n)}
\end{aligned}$$

Proposition

$\forall A \in K^{n\times n}: \det A = \det(A^T)$

Beweis.

Wegen $\sigma = (\sigma^{-1})^{-1}$ für alle $\sigma \in S_n$ ist $\Phi\colon S_n \to S_n, \sigma \mapsto \sigma^{-1}$ bijektiv.
Es gilt

$$\begin{aligned}
\det(A^T) &\overset{(*)}{=} \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n} \\
&\overset{\Phi \text{ bijektiv}}{=} \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})) a_{\sigma^{-1}(1)1}\cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} \\
&\underset{\text{für } \sigma\in S_n}{\overset{\sigma \text{ bijektiv}}{=}} \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})) a_{\sigma^{-1}(\sigma(1))\sigma(1)}\cdots a_{\sigma^{-1}(\sigma(n))\sigma(n)} \\
&\overset{\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})=\operatorname{sgn}\sigma}{=} \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)} \overset{(*)}{=} \det A
\end{aligned}$$

$\square$

Spalten statt Zeilen

Bemerkung

- Die Determinantenfunktion ist auch linear in den Spalten.

Spalten statt Zeilen

Bemerkung

- Die Determinantenfunktion ist auch linear in den Spalten.
- Zur Berechnung von Determinanten kann man auch Spaltenoperationen heranziehen.

Spalten statt Zeilen

Bemerkung

- Die Determinantenfunktion ist auch linear in den Spalten.
- Zur Berechnung von Determinanten kann man auch Spaltenoperationen heranziehen.
- Die Determinante einer Matrix in unterer Dreiecksgestalt ist das Produkt ihrer Diagonaleinträge.

Spalten statt Zeilen

Bemerkung

- Die Determinantenfunktion ist auch linear in den Spalten.
- Zur Berechnung von Determinanten kann man auch Spaltenoperationen heranziehen.
- Die Determinante einer Matrix in unterer Dreiecksgestalt ist das Produkt ihrer Diagonaleinträge.
- ...