Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2018

Sabine Burgdorf
María López Quijorna
Markus Schweighofer

Übungsblatt 1 zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1: Sind die folgenden Relationen $\preceq$ Halbordnungen auf den angegebenen Mengen A? Begründe jeweils Deine Antwort!

(a) $A := \mathbb{N}$ und für $m, n \in A$ definieren wir

$$m \preceq n \;:\Longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} (m \text{ und } n \text{ sind gerade und } m \leq n) \text{ oder} \\ (m \text{ und } n \text{ sind ungerade und } n \leq m) \end{pmatrix}.$$

(b) $A := \mathbb{N}$ und für $m, n \in A$ definieren wir

$$m \preceq n \;:\Longleftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{N} : n = m^k.$$

(c) $A := \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, das heißt A ist die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, und für $f, g \in A$ definieren wir

$$f \preceq g \;:\Longleftrightarrow\; \exists h \in A : f = h \circ g.$$

(d) $A := \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ und für $f, g \in A$ definieren wir

$$f \preceq g \;:\Longleftrightarrow\; \exists h \in A : f = g \circ h.$$

Aufgabe 2: Sei M eine Menge und A die durch Inklusion halbgeordnete Menge aller Halbordnungen auf M.

(a) Zeichne für $M := \{1, 2, 3\}$ ein Hasse-Diagramm der halbgeordneten Menge A.

(b) Betrachte für $M := \{1, 2, 3\}$ die Halbordnungen $\preceq_1 := \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,3)\}$ und $\preceq_2 := \{(1,1), (2,2), (2,3), (3,3)\}$ auf M. Entscheide ob die Teilmenge $\{\preceq_1, \preceq_2\}$ von A ein Infimum besitzt und ob sie ein Supremum besitzt. Gebe diese im Falle der Existenz jeweils an.

(c) Zeige, dass A immer ein kleinstes Element besitzt.

(d) Zeige, dass A genau dann ein größtes Element besitzt, wenn $\#M \leq 1$.

(e) Besitzt jede Teilmenge von A ein Infimum?

(f) Zeige, dass die maximalen Elemente von A genau die Ordnungen auf M sind.

Abgabe bis Freitag, den 27. April 2018, um 9:55 Uhr in das Fach Ihres Tutors neben dem Raum F411.