Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Sabine Burgdorf
Markus Schweighofer
30. August 2018

# Klausur zur Linearen Algebra II

**Familienname:**

**Vorname:**

**Matrikelnummer:**

**Übungsgruppenleiter in der Linearen Algebra II:**

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| erreichte Punktzahl | | | | | | | | | |
| Korrektor (Initialen) | | | | | | | | | |
| Maximalpunktzahl | 14 | 20 | 11 | 9 | 8 | 14 | 14 | 10 | 100 |

## Fasse den Klausurbogen nicht an, bevor die Klausur eröffnet wird!

Entferne nicht die Klammerung der Blätter. Sobald die Klausur eröffnet wird, trage auf **jeder Vorderseite sofort** Deinen Namen ein. Schreibe die Lösung zu einer Aufgabe nur auf die dafür vorgesehenen Blätter. Wenn Du noch genug Zeit hast, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Schmierpapier zu schreiben. Vergiss aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen.

Bei Rechenaufgaben ist der Rechenweg Teil der Lösung, die reine Angabe einer angeblich „wild erratenen“ Lösung wird also nicht mit voller Punktzahl bewertet.

Bei Manipulation von Matrizen sind die durchgeführten Spalten- oder Zeilenoperationen stets anzugeben (im Stile der Vorlesung oder ähnlich, also etwa $Z_2 \leftrightarrow Z_4$ für Vertauschung der Zeilen 2 und 4 oder $Z_1 \leftarrow Z_1 - 7Z_2$ für Subtrahieren des 7-fachen der Zeile 2 von der Zeile 1). Zögere bei Fragen nicht, Dich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen.

**Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten. Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind Schreibzeug, Schmierpapier[1] und eine Uhr[2]. Viel Erfolg!**

[1] anfangs unbeschrieben
[2] ohne eingebaute Kommunikationsgeräte

**Name:** **Seite 1 zur Aufgabe 1**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 1 (Multiple-Choice, ohne Begründung, 14 Punkte).** Schreibe für die folgenden 7 Fragen jeweils die Nummer aller richtigen Antworten unter die jeweilige Frage. Pro Frage sind 2 Punkte zu erreichen. Diese gibt es, wenn genau die richtigen Antworten angegeben sind. Ist nicht jede richtige Antwort, aber mindestens eine richtige und *gleichzeitig keine falsche* Antwort angegeben, so gibt es 1 Punkt. Andernfalls gibt es null Punkte. Es muss und soll **keine Begründung** gegeben werden.

(a) Für alle halbgeordnete Mengen $(A, \preceq)$ und alle $a, b, c \in A$ gilt:

(1) $(a \preceq b \,\&\, b \preceq c \,\&\, c \preceq a) \implies a = b = c$

(2) $a = b = c \implies (a \preceq b \,\&\, b \preceq c \,\&\, c \preceq a)$

(3) Die Menge $\{a, b, c\}$ besitzt ein Maximum.

(4) Die Menge $\{a, b, c\}$ besitzt ein maximales Element.

**Richtige Antworten:**

(b) Die Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^2 - (y + z)^2$ ist eine

(1) Linearform

(2) quadratische Form

(3) Bilinearform

(4) symmetrische Bilinearform

auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

**Richtige Antworten:**

(c) Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto (x - 1)^2 + (y + 1)^2 - (y - x)^2 - 2xy - 2$ ist eine

(1) Linearform

(2) quadratische Form

(3) Bilinearform

(4) symmetrische Bilinearform

auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

**Richtige Antworten:**

**Seite 2 zur Aufgabe 1**

(d) Jedes Skalarprodukt auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V$ ist eine

(1) positiv definite
(2) nicht ausgeartete
(3) symmetrische
(4) negativ definite

Bilinearform auf $V$.

**Richtige Antworten:**

(e) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$, alle symmetrischen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und alle invertierbaren Matrizen $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

(1) $PB = AP$,
(2) $B = P^T AP$,
(3) $PB = A^3P$,
(4) $B = P^T A^3 P$,

gilt: $A$ und $B$ haben dieselbe Anzahl von negativen Eigenwerten, wenn man diese mit Vielfachheit zählt (also entsprechend ihrer jeweiligen geometrischen und gleichzeitig algebraischen Vielfachheit oft).

**Richtige Antworten:**

(f) Sei $A = \{0\} = \{1\}$ ein einelementiger kommutativer Ring (also ein Nullring). Das einzige Element von $A$ ist in $A$

(1) irreduzibel.
(2) prim.
(3) eine Einheit.
(4) ein ggT der Elemente von $\emptyset$.

**Richtige Antworten:**

(g) Für alle Hauptidealringe $A$ und alle $B \subseteq A$ besitzen die Elemente von $B$ in $A$

(1) einen gemeinsamen Teiler.
(2) ein gemeinsames Vielfaches.
(3) einen ggT.
(4) ein kgV.

**Richtige Antworten:**

**Name:** **Seite 1 zur Aufgabe 2**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 2 (Beispiele, ohne Begründung, 20 Punkte).** Finde

(a) eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ derart, dass es einen Isomorphismus halbgeordneter Mengen zwischen $(A, |)$ und $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \subseteq)$ gibt, wobei $|$ die Teilerbeziehung und $\subseteq$ die Inklusion auf den jeweiligen Mengen bezeichne.

(b) Eine Menge $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ derart, dass es einen Isomorphismus halbgeordneter Mengen zwischen $(A, \subseteq)$ und $(\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, |)$ gibt, wobei wieder $|$ die Teilerbeziehung und $\subseteq$ die Inklusion auf den jeweiligen Mengen bezeichne.

(c) eine geordnete Menge $(A, \leq)$, in der jede Teilmenge eine obere Schranke aber nicht jede Teilmenge eine untere Schranke besitzt.

(d) eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^3$ mit Sylvester-Signatur $(1, 2)$.

(e) eine quadratische reelle Matrix, deren Leithauptminoren alle nichtnegativ sind, die aber trotzdem nicht positiv semidefinit ist.

(f) eine positiv definite Matrix, die einen negativen Minor besitzt.

(g) eine reelle normale Matrix mit charakteristischem Polynom $-X^3 + 4X^2 - 6X + 4$.

(h) eine nichtdiagonale Matrix aus $\mathbb{R}[X]^{3\times 3}$ mit Determinantenteilern $X$, $X^3$ und $X^6$.

(i) eine Matrix aus $\mathbb{R}^{3\times 3}$ mit den Eigenwerten 1 und 2, wobei geometrische und algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 2 verschieden seien.

(j) $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq b$ und $\gcd\{a, b\} = \operatorname{lcm}\{a, b\}$.

Pro Teilaufgabe gibt es 2 Punkte. Die Beispiele müssen leicht zu überprüfen sein. Für ein falsches Beispiel gibt es keinesfalls Punkte. Es muss genau ein konkretes Beispiel angegeben werden. Bei Angabe von mehreren Beispielen oder einer Schar von Beispielen gibt es keine Punkte! Es muss und soll **keine Begründung** gegeben werden.

**Lösung zur Aufgabe 2:**

## Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

**Name:** **Seite 1 zur Aufgabe 3**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 3 (Halbordnungen, 11 Punkte).** Die Relation $\preceq$ auf der Menge

$$A := \{-1, 0, 1\} \times \mathbb{N}$$

sei gegeben durch

$$(s_1, n_1) \preceq (s_2, n_2) :\Longleftrightarrow \; (s_1^2 < s_2^2 \text{ oder } (s_1 = s_2 \;\&\; n_1 \leq n_2)) \qquad {\scriptstyle (s_1, s_2 \in \{-1,0,1\},\; n_1, n_2 \in \mathbb{N})}.$$

(a) Zeige, dass $(A, \preceq)$ eine halbgeordnete Menge ist. *3 Punkte*

(b) Ist $(A, \preceq)$ eine geordnete Menge? (Begründe Deine Antwort!) *1 Punkt*

(c) Veranschauliche $(A, \preceq)$ durch ein Hasse-Diagramm. *2 Punkte*

Gib jeweils **ohne Beweis** ein Beispiel an für eine Teilmenge $B$ von $A$, die

(d) kein kleinstes Element hat. *1 Punkt*

(e) eine Kette ohne obere Schranke ist. *1 Punkt*

(f) genau ein maximales Element aber kein Maximum hat. *1 Punkt*

(g) endlich ist und eine untere aber keine obere Schranke hat. *1 Punkt*

(h) eine (bezüglich Inklusion) maximale Kette ist. *1 Punkt*

**Lösung zur Aufgabe 3:**

## Seite 2 zur Aufgabe 3

## Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 3:

**Name:**

**Seite 3 zur Aufgabe 3**

**erreichte Punktzahl:**

**Korrektor (Initialen):**

**Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 3:**

## Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 3:

**Name:** **Seite 1 zur Aufgabe 4**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 4 (Sylvester-Signatur, 9 Punkte).** Bestimme die Sylvester-Signatur der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 8 \\ 0 & 8 & 14 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

**Lösung zur Aufgabe 4:**

## Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 4:

**Name:** **Seite 1 zur Aufgabe 5**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 5 (größte gemeinsame Teiler, 8 Punkte).** Betrachte das von $3^4+3^3+3^2+3$ erzeugte Ideal $I := (3^4 + 3^3 + 3^2 + 3)$ im kommutativen Ring $\mathbb{Z}$.

(a) Zeige $3^5 \equiv_I 3$. *2 Punkte*

(b) Berechne $\gcd\{9^{10} - 1, 9^5 + 11\}$ in $\mathbb{Z}$. *6 Punkte*

**Lösung zur Aufgabe 5:**

**Seite 2 zur Aufgabe 5**

## Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 5:

**Name:** **Seite 1 zur Aufgabe 6**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 6 (Smithsche Normalform, 14 Punkte).** Betrachte die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}.$$

(a) Berechne alle Minoren von $A$. *3 Punkte*

(b) Berechne die Determinantenteiler von $A$. *3 Punkte*

(c) Berechne die Elementarteiler von $A$. *3 Punkte*

(d) Berechne die Smithsche Normalform $S$ von $A$. *2 Punkte*

(e) Berechne invertierbare Matrizen $P, Q \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$ mit $PAQ = S$. *3 Punkte*

*Hinweis: Selbstverständlich darf man die Teilaufgaben auch in einer anderen als der angegebenen Reihenfolge bearbeiten, sofern diese klar erkennbar gemacht wird, und dann auf die jeweils vorher bearbeiteten Teilaufgaben zurückgreifen.*

**Lösung zur Aufgabe 6:**

**Seite 2 zur Aufgabe 6**

## Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 6:

**Name:** **Seite 3 zur Aufgabe 6**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 6:**

## Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 6:

**Name:** **Seite 1 zur Aufgabe 7**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 7 (Normalformen, 14 Punkte).** Sei $A \in \mathbb{Q}^{6\times 6}$ mit Minimalpolynom $\mu_A = (X^2+1)^2 \in \mathbb{Q}[X]$. Bestimme

(a) den 6-ten Elementarteiler von $A - XI_6 \in \mathbb{Q}[X]^{6\times 6}$, *2 Punkte*

(b) den 5-ten Elementarteiler von $A - XI_6 \in \mathbb{Q}[X]^{6\times 6}$, *3 Punkte*

(c) das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{Q}[X]$ von $A$, *3 Punkte*

(d) die Normalform von Frobenius von $A$, *2 Punkte*

(e) die Normalform von Weierstraß von $A$, *2 Punkte*

(f) die Normalform von Jordan über $\mathbb{C}$ (also wenn man $A$ als Matrix aus $\mathbb{C}^{6\times 6}$ auffasst) von $A$. *2 Punkte*

**Lösung zur Aufgabe 7:**

## Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 7:

**Name:** **Seite 1 zur Aufgabe 8**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 8 (Hauptidealringe, 10 Punkte).** Seien $A$ ein Hauptidealring, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $a_1, \dots, a_n \in A$. Sei $c \in A$ ein ggT von $a_1, \dots, a_n$. Zeige, dass es eine Matrix $M \in A^{n \times n}$ gibt mit $\det M = c$, deren erste Zeile $(a_1 \ \dots \ a_n)$ ist.

**Lösung zur Aufgabe 8:**

## Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 8: