Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Sabine Burgdorf
Markus Schweighofer
30. August 2018

Klausur zur Linearen Algebra II, Lösungsvorschlag

Aufgabe 1. (a) 1,2,4
(b) 2
(c) 1
(d) 1,2,3
(e) 1,2,3,4
(f) 3,4
(g) 1,2,3,4

Aufgabe 2. (a) $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
(b) $\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 7\}, \{1, 2, 4, 8\}\}$
(c) $\mathbb{N}$ zusammen mit der zu der natürlichen Ordnung inversen Ordnung.
(d) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^2 - y^2 - z^2$
(e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
(f) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
(g) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
(h) $\begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X^3 \\ 0 & X^2 & 0 \end{pmatrix}$
(i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
(j) $(a, b) := (1, -1)$

Aufgabe 3. (a) Zu zeigen ist, dass die Relation $\preceq$ auf A reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

Die Reflexivität ist unmittelbar klar.

Um die Transitivität zu zeigen, seien $(s_1, n_1), (s_2, n_2), (s_3, n_3) \in A$ mit $(s_1, n_1) \preceq (s_2, n_2) \preceq (s_3, n_3)$. Falls $s_1^2 < s_2^2$, so $s_2^2 = 1$ und daher $s_2 = s_3$ (denn $1 < s_3^2$ ist unmöglich) und daher $s_1^2 < s_2^2 = s_3^2$, woraus wie gewünscht $(s_1, n_1) \preceq (s_3, n_3)$ folgt. Gelte also ab jetzt $s_1 = s_2$ und $n_1 \leq n_2$. Falls $s_2^2 < s_3^2$, so $s_1^2 = s_2^2 < s_3^2$ und daher wieder $(s_1, n_1) \preceq (s_3, n_3)$. Gelte also schließlich $s_2 = s_3$ und $n_2 \leq n_3$. Dann $s_1 = s_2 = s_3$ und $n_1 \leq n_2 \leq n_3$, woraus wiederum $(s_1, n_1) \preceq (s_3, n_3)$ folgt.

Um schließlich die Antisymmetrie zu zeigen, seien $(s_1, n_1), (s_2, n_2) \in A$ mit $(s_1, n_1) \preceq (s_2, n_2) \preceq (s_1, n_1)$. Würde $s_1^2 < s_2^2$ gelten, so folgte $s_1^2 < s_2^2 \leq s_1^2$, was absurd ist. Analog zeigt man, dass $s_2^2 < s_1^2$ nicht gelten kann. Also $s_1 = s_2$ und $n_1 \le n_2 \le n_1$, woraus die gewünschte Gleichung $(s_1, n_1) = (s_2, n_2)$ folgt.

(b) $(A, \preceq)$ ist keine geordnete Menge, da die Halbordnung $\preceq$ nicht linear ist, denn zum Beispiel $(-1,1) \not\preceq (1,1) \not\preceq (-1,1)$.

(c)

$$\begin{array}{rcccl}
 & \vdots & & \vdots & \\
(-1,4) & \bullet & & \bullet & (1,4) \\
(-1,3) & \bullet & & \bullet & (1,3) \\
(-1,2) & \bullet & & \bullet & (1,2) \\
(-1,1) & \bullet & & \bullet & (1,1) \\
 & & \vdots & & \\
 & & \bullet & (0,4) & \\
 & & \bullet & (0,3) & \\
 & & \bullet & (0,2) & \\
 & & \bullet & (0,1) &
\end{array}$$

(d) $\{(-1,1), (1,1)\}$
(e) $\{1\} \times \mathbb{N}$
(f) $\{(-1,1)\} \cup (\{1\} \times \mathbb{N})$
(g) $\{(-1,1), (1,1)\}$
(h) $\{0,1\} \times \mathbb{N}$

Aufgabe 4. Die Leithauptminoren der fraglichen Matrix

$$\det\begin{pmatrix}3\end{pmatrix} = 3 > 0, \qquad \det\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix} = 3\cdot 5 - 1\cdot 1 > 0 \qquad \text{und}$$

$$\det\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 5 & 8\\ 0 & 8 & 14\end{pmatrix} = 3\cdot 5\cdot 14 + 0 + 0 - 0 - 8\cdot 8\cdot 3 - 0 = 3\cdot 5\cdot 14 - 8\cdot 8\cdot 3 = 3(70-64) > 0$$

sind alle positiv. Daher ist die Matrix positiv definit und damit die Sylvester-Signatur $(3, 0)$.

Aufgabe 5. (a) Zu zeigen ist $3^5 - 3 \in I$. Dies folgt sofort aus

$$3^5 - 3 = (3-1)(3^4 + 3^3 + 3^2 + 3) \in I.$$

(b) Da $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist, ist der eindeutig bestimmte nichtnegative Erzeuger des von $9^{10} - 1$ und $9^5 + 11$ in $\mathbb{Z}$ erzeugten Ideals $J := (9^{10} - 1, 9^5 + 11)$ gesucht. Da $9^{10} = (9^5)^2 \equiv_{(9^5+11)} (-11)^2 = (9+2)^2 = 9^2 + 4\cdot 9 + 4$, gilt

$$\begin{aligned}J &= (9^2 + 4\cdot 9 + 3, 9^5 + 11) = (3^4 + 3^3 + 3^2 + 3, 3^{10} + 11) \overset{\text{(a)}}{=} (3^4 + 3^3 + 3^2 + 3, 3^2 + 11)\\ &= (3^4 + 3^3 + 3^2 + 3, 20) = (81 + 27 + 9 + 3, 20) = (1 + 7 + 9 + 3, 20) = (20).\end{aligned}$$

Es gilt also $\gcd\{9^{10}-1, 9^5+11\} = 20$.

Aufgabe 6. (d)(e) Laut Vorlesung kann man S wie in (d) verlangt aus A berechnen, indem man auf A elementare Zeilen- und Spaltenoperationen ausführt, und man kann dabei P beziehungsweise Q wie in (e) verlangt gleich mitberechnen, indem man dieselben Zeilen- beziehungsweise Spaltenoperationen dabei jeweils auf I_3 anwendet, also das Schema $\begin{array}{c|c} A & I_3 \\ \hline I_3 & \end{array}$ in $\begin{array}{c|c} S & P \\ \hline Q & \end{array}$ überführt:

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & & & \\
0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}
\underset{Z_3 \leftarrow Z_3 - 3Z_1}{\overset{Z_2 \leftarrow Z_2 - 2Z_1}{\rightsquigarrow}}
\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\
0 & -5 & -7 & -3 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & & & \\
0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}
$$

$$
\underset{S_3 \leftarrow S_3 - 3S_1}{\overset{S_2 \leftarrow S_2 - 2S_1}{\rightsquigarrow}}
\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\
0 & -5 & -7 & -3 & 0 & 1 \\
\hline
1 & -2 & -3 & & & \\
0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}
$$

$$
\overset{Z_2 \leftarrow -Z_2}{\rightsquigarrow}
\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\
0 & -5 & -7 & -3 & 0 & 1 \\
\hline
1 & -2 & -3 & & & \\
0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}
$$

$$
\overset{S_3 \leftarrow S_3 - 5S_2}{\rightsquigarrow}
\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\
0 & -5 & 18 & -3 & 0 & 1 \\
\hline
1 & -2 & 7 & & & \\
0 & 1 & -5 & & & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}
$$

$$
\overset{Z_3 \leftarrow Z_3 + 5Z_2}{\rightsquigarrow}
\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 18 & 7 & -5 & 1 \\
\hline
1 & -2 & 7 & & & \\
0 & 1 & -5 & & & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}
$$

Da $S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$ eine Diagonalmatrix ist, alle Diagonaleinträge nichtnegativ sind und immer der vorherige den nächsten teilt, ist S in Smithscher Normalform. Nach dem anfangs gesagten ist S also die Smithsche Normalform von A und die Matrizen $P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$ und $Q := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$ sind invertierbar mit $PAQ = S$.

(c) Das Tupel der Elementarteiler von A kann direkt an der bereits berechneten Smithschen Normalform S abgelesen werden als $c(A) = (1, 1, 18)$.

(b) Der i-te Determinantenteiler von A ($i \in \{1, 2, 3\}$) ist laut Vorlesung das Produkt der ersten i Elementarteiler von A. Das Tupel der Determinanteiler von A ist also $d(A) = (1, 1, 18)$.

(a) Der Minor der Ordnung 0 von A ist die Determinante der leeren Matrix, also 1. Die Minoren der Ordnung 1 von A sind die Einträge von A, also 1, 2, 3, 2, 3, 1, 3, 1 und 2. Die Minoren der Ordnung 2 von A sind

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -1, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -4, \quad \text{und} \quad \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 5.$$

Der Minor der Ordnung 3 ist die Determinante von A, also $6 + 6 + 6 - 27 - 1 - 8 = -18$.

Aufgabe 7. Bezeichne $c_i \in \mathbb{Q}[X]$ den i-ten Elementarteiler von $A - XI_6$ für jedes $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(a) Nach 17.5.4 gilt $\mu_A = c_6 = (X^2 + 1)^2$.

(b) Wegen $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ (sogar für $x \in \mathbb{R}$) hat $X^2 + 1$ keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$ und ist daher als Polynom vom Grad 2 irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$. Weil $\mathbb{Q}[X]$ faktoriell ist, folgt aus

$$c_1 \mid c_2 \mid c_3 \mid c_4 \mid c_5 \mid c_6 = (X^2 + 1)^2,$$

dass $c_i = (X^2 + 1)^{k_i}$ für gewisse $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6 \in \mathbb{N}_0$ derart dass

$$k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq k_4 \leq k_5 \leq k_6 = 2.$$

Wieder mit 17.5.4 aus der Vorlesung, weiß man $\chi_A = (-1)^6 c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6$, woraus $6 = \deg(\chi_A) = \deg(c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6) = 2(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6)$ folgt. Also $1 = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5$ und daher $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ und $k_5 = 1$. Es folgt $c_5 = X^2 + 1$.

(c) In (b) haben wir gesehen, dass $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$. Also

$$\chi_A = (-1)^6 c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 = c_5 c_6 \overset{\text{(b)}}{=} (X^2 + 1)(X^2 + 1)^2 = (X^2 + 1)^3.$$

(d) Aus 17.5.4 folgt mit

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1, \; c_5 = X^2 + 1 \text{ und } c_6 = (X^2 + 1)^2 = X^4 + 2X^2 + 1,$$

dass die Frobenius'sche Normalform von A die Matrix in Blockdiagonalgestalt mit den Diagonalblöcken

$$C(c_5) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C(c_6) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und lautet damit

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) Da c_5 und c_6 bereits Potenzen von Primpolynomen sind und A ähnlich zu ihrer Frobenius'schen Normalform ist, ist die in (d) angegebene Frobenius'schen Normalform gleichzeitig die Weierstraß'sche Normalform von A.

(f) Die Elementarteiler von $A - XI_6$ aufgefasst als Matrix aus $\mathbb{Q}[X]^{6\times 6}$ bleiben natürlich dieselben, wenn wir $A - XI_6$ als Matrix aus $\mathbb{C}[X]^{6\times 6}$ auffassen, wenn wir also über $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{Q}$ arbeiten (da die Rechnung, mit der man die Smithsche Normalform von $A - XI_6$ und damit die Elementarteiler ausrechnet, offensichtlich gültig bleibt). Allerdings gilt nun $c_5 = X^2+1 = (X-\mathring{\imath})(X+\mathring{\imath})$ und $c_6 = X^2+1 = (X-\mathring{\imath})^2(X+\mathring{\imath})^2$. Daher ist die Jordansche Normalform von A die Matrix in Blockdiagonalgestalt mit den Diagonalblöcken

$$J(\mathring{\imath},1) = \begin{pmatrix} \mathring{\imath} \end{pmatrix},\ J(-\mathring{\imath},1) = \begin{pmatrix} -\mathring{\imath} \end{pmatrix},\ J(\mathring{\imath},2) = \begin{pmatrix} \mathring{\imath} & 0 \\ 1 & \mathring{\imath} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J(-\mathring{\imath},2) = \begin{pmatrix} -\mathring{\imath} & 0 \\ 1 & -\mathring{\imath} \end{pmatrix}.$$

und lautet damit

$$\begin{pmatrix} \mathring{\imath} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathring{\imath} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathring{\imath} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathring{\imath} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathring{\imath} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\mathring{\imath} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8. Betrachte die Matrizen

$$M' := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in A^{1\times n} \text{ und } D' = \begin{pmatrix} c & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in A^{1\times n}.$$

Es gilt

$$\operatorname{minor}_1(A) = (a_1, \dots, a_n) \underset{\text{idealring}}{\overset{A \text{ Haupt-}}{=}} (c) = (c, 0, \dots, 0) = \operatorname{minor}_1(D')$$

und damit $d_1(A) = d_1(D')$. Wegen $\min\{1,n\} = 1$ gilt daher $d(A) = d(S')$ und somit laut Vorlesung $M' \sim D'$, das heißt M' und D' sind zeilenspaltenäquivalent. Betrachte die Diagonalmatrix $D \in A^{n\times n}$ mit Diagonaleinträgen $c, 1, \dots, 1$, deren Determinante c ist. Indem man die erlaubten Zeilen- und Spaltenoperationen, die D' in M' überführen entsprechend auf D statt D' anwendet, erhält man eine Matrix $M_0 \in A^{n\times n}$ deren erste Zeile $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ ist. Wegen $M_0 \sim D$, gibt es invertierbare $P, Q \in A^{n\times n}$ mit $M_0 = PDQ$. Da P und Q invertierbar sind, sind deren Determinanten Einheiten in A. Mit $u := (\det P)(\det Q) \in A^\times$ folgt daher $\det(M_0) = uc$. Indem man die zweite Zeile (benutze die Voraussetzung $n \geq 2$) von M_0 mit u^{-1} multipliziert, erhält man eine Matrix $M \in A^{n \times n}$ mit $M \sim M_0$, deren erste Zeile immer noch $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ ist und deren Determinante gleich c ist.