Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2019/2020

Alexander Taveira Blomenhofer
Markus Schweighofer

Übungsblatt 3 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1. Seien $n, s \in \mathbb{N}_0$ und K ein Körper. Seien weiter $\ell_1, \ldots, \ell_s \in K[X_1, \ldots, X_n]$ linear, das heißt vom Grad ≤ 1. Zeige, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(a) $V(\ell_1, \ldots, \ell_s) \cap K^n = \emptyset$

(b) $V(\ell_1, \ldots, \ell_s) = \emptyset$

(c) Es gibt $a_1, \ldots, a_s \in K$ mit $1 = a_1\ell_1 + \cdots + a_s\ell_s$.

Finde Gegenbeispiele, die zeigen, dass man auf die Voraussetzung der Linearität von $\ell_1, \ldots, \ell_s$ weder in „(a) $\Longrightarrow$ (b)“ noch in „(b) $\Longrightarrow$ (c)“ verzichten kann.

Hinweis: Benutze Wissen aus der Linearen Algebra.

Aufgabe 2. Seien $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Zeige, dass der Ring $K[X_1, \ldots, X_n]$ unendlich viele paarweise nicht assoziierte Primelemente besitzt.

Aufgabe 3. Seien $k, t \in \mathbb{N}_0$ und R eine Relation auf $\{1, \ldots, k\}$ (also eine Teilmenge von $\{1, \ldots, k\}^2$). Als *Beispielszenario* bezeichnen wir im folgenden den Spezialfall $k = 6$ und $R = \{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6\}$.

Franz und Sepp sind eineiige Zwillingsbrüder. Die beiden haben von ihrem Chef eine Liste mit k Aufgaben erhalten, die sie innerhalb von t Tagen erledigen sollen. Franz und Sepp haben genau dieselbe Ausbildung und dieselben Fertigkeiten. Die Erledigung einer jeden Aufgabe braucht für Franz und damit auch für Sepp jeweils genau einen Tag. Die Erledigung einer Aufgabe kann nicht auf mehrere Tage verteilt werden. Dementsprechend kann keiner der beiden Brüder an mehr als einer Aufgabe am Tag arbeiten. Weiter sind bei der Reihenfolge der Bearbeitung Bedingungen einzuhalten, da manche der Aufgaben voneinander abhängen. Diese Abhängigkeit wird durch die Relation R beschrieben, wobei $(i, j) \in R$ bedeute, dass bevor Aufgabe j an einem Tag bearbeitet werden kann, Aufgabe i am Vortag schon fertiggestellt worden sein muss.[1]

(a) Finde einen Körper K, einen Polynomring A über K in endlich vielen Variablen und ein Ideal I in A derart, dass $1 \in I$ genau dann, wenn es nicht möglich ist, die Aufgaben $1, \ldots, k$ so auf Franz und Sepp (und auf t Tage) zu verteilen, dass alle Bedingungen erfüllt sind. Finde zudem $m \in \mathbb{N}_0$ sowie $f_1, \ldots, f_m \in A$ mit $I = (f_1, \ldots, f_m)$. Begründe die Korrektheit deiner Wahl von I.

[1] Eine beliebige Nummerierung der Aufgaben sei hierbei fixiert. Der Fall, dass der Chef die beiden Zwillingsbrüder vor unmögliche Aufgaben stellt, ist zugelassen (etwa wenn $\{(1, 3), (3, 1)\} \subseteq R$ oder $(3, 3) \in R$). In diesem Fall sollten Franz und Sepp den Chef überzeugen, dass das Problem nicht lösbar ist.

(b) Erstelle ein Singular-Skript, welches R und t als einstellbare Parameter entgegennimmt und daraus den Ring A, $m \in \mathbb{N}_0$ sowie Erzeuger $f_1, \ldots, f_m \in A$ eines Ideals $I = (f_1, \ldots, f_m)$ in A kreiert, welches die Eigenschaft aus (a) erfüllt. Zur Vereinfachung darfst du k, t und R im Code feste Werte zuweisen (etwa wie im Beispielszenario), dein Code muss aber für beliebige Wahlen von $k, t \in \mathbb{N}_0$ und Relationen R auf $\{1, \ldots, k\}$ korrekte Ideale liefern.

Hinweis: Obwohl Dir die Wahl des Körpers in (a) *freigestellt ist, ist es ratsam, einen zu wählen, der leicht in Singular implementiert werden kann.*

Abgabe bis Freitag, den 15. November 2019, 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.