Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2019/2020

Alexander Taveira Blomenhofer
Markus Schweighofer

Übungsblatt 6 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1. Sei $C|K$ eine Körpererweiterung und C algebraisch abgeschlossen. Betrachte die affine K-Varietät

$$V := V(X+Y+1, XY-1) \subseteq \mathbb{A}^2$$

(a) Finde ein Ideal I der Polynomalgebra $K[T]$ in einer Variablen T so, dass

$$K[V] \cong K[T]/I.$$

(b) Finde eine affine K-Untervarietät W von $\mathbb{A}$ mit $V \cong W$.

(c) Ist V irreduzibel?

(d) Ist das Ideal $(X+Y+1, XY-1)$ von $K[X,Y]$ ein Radikalideal?

Hinweis: Es kann hilfreich sein, nicht stur in der Reihenfolge der Teilaufgaben vorzugehen, sondern zuerst eine zu (a) ähnliche Behauptung aufzustellen und zu beweisen. Hängen Deine Antworten von der Charakteristik des Körpers K ab?

Aufgabe 2. Sei $\leq$ eine Wohlordnung auf der Menge M. Betrachte die Relation $\preceq$ auf der Menge $\mathscr{P}_{\text{fin}}(M)$ der *endlichen* Teilmengen von M erklärt durch

$$A \preceq B \;:\Longleftrightarrow\; (A = B \text{ oder } \max(A \bigtriangleup B) \in B)$$

für $A, B \subseteq M$ endlich. Zeige: $\preceq$ ist eine Wohlordnung auf $\mathscr{P}_{\text{fin}}(M)$.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper, $\varphi\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ ein Morphismus von K-Varietäten, $\varphi^*\colon K[Y_1, \dots, Y_m] \to K[X_1, \dots, X_n]$ der zugehörige K-Algebrenhomomorphismus der Koordinatenringe und $I \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal. Zeige, dass dann $V((\varphi^*)^{-1}(I))$ der K-Zariskiabschluss von $\varphi(V(I))$ ist, also

$$V((\varphi^*)^{-1}(I)) = \overline{\varphi(V(I))}.$$

Aufgabe 4. Seien K ein Körper, $\varphi\colon V \to W$ ein Morphismus affiner K-Varietäten und $\varphi^*\colon K[W] \to K[V]$ der dazu duale K-Algebrenhomomorphismus. Zeige oder widerlege durch ein Gegenbeispiel:

(a) φ injektiv $\implies$ φ^* surjektiv.

(b) φ surjektiv $\implies$ φ^* injektiv.

(c) φ^* injektiv $\implies$ φ surjektiv.

(d) φ^* surjektiv $\implies$ φ injektiv.

Abgabe bis Freitag, den 6. Dezember 2019, 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.