Universität Konstanz Alexander Taveira Blomenhofer
Fachbereich Mathematik und Statistik Markus Schweighofer
Wintersemester 2019/2020

Übungsblatt 13 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1. Auf dem vorletzten Blatt haben wir ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[Y_1,Y_2]$ gefunden derart, dass $V(f)$ der Abschluss von

$$C := \left\{ 3\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos(17\varphi)\\ \sin(17\varphi)\end{pmatrix} \;\middle|\; \varphi \in [0,2\pi) \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

bezüglich der $\mathbb{Q}$-Zariskitopologie auf $\mathbb{A}^2 = \mathbb{C}^2$ ist. Daraus haben wir gefolgert, dass $V(f) \cap \mathbb{R}^2$ der Abschluss von C bezüglich der $\mathbb{Q}$-Zariskitopologie auf $\mathbb{R}^2$ ist. In dieser Aufgabe zeigen wir sogar

$$V(f) \cap \mathbb{R}^2 = C.$$

Was wir dazu zeigen müssen ist nur noch, dass C bezüglich der $\mathbb{Q}$-Zariskitopologie auf $\mathbb{R}^2$ abgeschlossen ist.

Dazu verwenden wir zwei Hauptzutaten: Erstens gehen wir geschickter vor als auf Blatt 11, indem wir *projektive* statt *affiner* Eliminationstheorie verwenden. Zweitens verwenden wir die wichtigen Beobachtungen bezüglich reeller Punkte, die wir auf dem letzten Blatt gemacht haben. Wie bereits auf dem letzten Blatt, schreiben wir für jedes Polynom p mit komplexen Koeffizienten wieder $\mathrm{Re}(p)$ und $\mathrm{Im}(p)$ für das Polynom dessen Koeffizienten die Realteile beziehungsweise Imaginärteile der entsprechenden Koeffizienten von p sind. Wir betrachten für

$$g := X_1^2 + X_2^2 - 1$$

wieder die affine $\mathbb{Q}$-Varietät

$$V := V(g) \subseteq \mathbb{C}^2 = \mathbb{A}^2$$

und den reellen Einheitskreis $S := V \cap \mathbb{R}^2$. Setze wieder

$$f_1 := 3X_1 + \mathrm{Re}((X_1 + \mathring{\imath}X_2)^{17}) \in \mathbb{Q}[X_1,X_2],$$
$$f_2 := 3X_2 + \mathrm{Im}((X_1 + \mathring{\imath}X_2)^{17}) \in \mathbb{Q}[X_1,X_2]$$

und betrachte den Morphismus

$$\varphi\colon V \to \mathbb{A}^2,\ (x_1,x_2) \mapsto (f_1(x),f_2(x)),$$

für den gemäß Blatt 12 gilt

$$\varphi(S) = C \qquad \text{und} \qquad \varphi^{-1}(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Wie auf Blatt 11 betrachten wir hierzu wieder die affine $\mathbb{Q}$-Varietät

$$W := \{(x,y) \in V \times \mathbb{A}^2 \mid \varphi(x) = y\} = V(X_1^2 + X_2^2 - 1, f_1 - Y_1, f_2 - Y_2) \subseteq \mathbb{A}^4$$

sowie die Projektion $\pi\colon \mathbb{A}^4 \to \mathbb{A}^2$, $(x_1,x_2,y_1,y_2) \mapsto (y_1,y_2)$, sodass

$$\varphi(V) = \pi(W) \qquad \text{und} \qquad C = \varphi(S) = \pi(W \cap \mathbb{R}^4)$$

gilt. Betrachte die in den Variablen X_0,X_1,X_2 homogenen Polynome

$$\begin{aligned}
\widehat{g} &:= X_1^2 + X_2^2 - X_0^2 \in \mathbb{Q}[X_0,X_1,X_2],\\
\widehat{f_1} &:= 3X_1X_0^{16} + \operatorname{Re}((X_1 + \mathring{i}X_2)^{17}) \in \mathbb{Q}[X_0,X_1,X_2] \quad \text{und}\\
\widehat{f_2} &:= 3X_2X_0^{16} + \operatorname{Im}((X_1 + \mathring{i}X_2)^{17}) \in \mathbb{Q}[X_0X_1,X_2]
\end{aligned}$$

und dazu

$$\begin{aligned}
\widehat{W} := \{([x_0 : x_1 : x_2],(y_1,y_2)) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^2 \mid \ & \widehat{g}(x_0,x_1,x_2) = 0,\\
& \widehat{f_1}(x_0,x_1,x_2) = x_0^{17}y_1,\\
& \widehat{f_2}(x_0,x_1,x_2) = x_0^{17}y_2\}.
\end{aligned}$$

Wie in der Vorlesung fassen wir ab jetzt oft $\mathbb{A}^2$ und $\mathbb{P}$ gelegentlich als Teilmengen von $\mathbb{P}^2$ auf vermöge

$$\mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2,\ (x_1,x_2) \mapsto [1 : x_1 : x_2] \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P} \hookrightarrow \mathbb{P}^2,\ [x_1 : x_2] \mapsto [0 : x_1 : x_2]$$

und nennen dabei $\mathbb{P}$ auch die *unendlich ferne Gerade*. Dementsprechend fassen wir dann $\mathbb{A}^4 = \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^2$ als Teilmenge von $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^2$ und $\mathbb{P} \times \mathbb{A}^2$ als Teilmenge von $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^2$ auf. In diesem Sinne gilt offensichtlich $\widehat{W} \cap \mathbb{A}^4 = W$ und

$$\begin{aligned}
W_\infty := \widehat{W} \cap (\mathbb{P} \times \mathbb{A}^2) = \{([x_1 : x_2],(y_1,y_2)) \in \mathbb{P} \times \mathbb{A}^2 \mid \ & \widehat{g}(0,x_1,x_2) = 0,\\
& \widehat{f_1}(0,x_1,x_2) = 0,\\
& \widehat{f_2}(0,x_1,x_2) = 0\}.
\end{aligned}$$

(a) Berechne in Singular die reduzierte Gröbnerbasis des von den Polynomen

$$X_1^2 + X_2^2,\ \operatorname{Re}((X_1 + \mathring{i}X_2)^{17}) \text{ und } \operatorname{Im}((X_1 + \mathring{i}X_2)^{17})$$

in $\mathbb{Q}[X_1,X_2]$ erzeugten Ideals.

(b) Zeige mit Hilfe von (a), dass $W_\infty = \emptyset$.

(c) Zeige mit (b) und Satz 3.4.8 aus der Vorlesung, dass $\pi(W)$ abgeschlossen ist bezüglich der $\mathbb{Q}$-Zariskitopologie auf $\mathbb{A}^2 = \mathbb{C}^2$.

(d) Zeige $\pi(W) \cap \mathbb{R}^2 = \pi(W \cap \mathbb{R}^4)$.

(e) Folgere, dass C bezüglich der $\mathbb{Q}$-Zariskitopologie auf $\mathbb{R}^2$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 2. Betrachte wieder die $\mathbb{R}$-Algebra $\mathbb{R}^4$ versehen mit der Multiplikation aus Aufgabe 1 auf Blatt 9.

(a) Fülle den bereitgestellten Lückencode `quaternionen_interaktiv.sing` derart aus, dass die im Code gestellte Aufgabe 1 bearbeitet wird. Beantworte zudem die andere Aufgabe im Code.

(b) Wir bezeichnen für $i, j \in \{1,2,3\}$ mit $f_{ij} \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_4]$ das eindeutig bestimmte Polynom derart, dass für alle $x \in \mathbb{R}^4$ $f_{ij}(x)$ die $(i+1)$-te Koordinate von $xe_{j+1}x^* \in \{0\} \times \mathbb{R}^3$ ist. Setze $f := (f_{ij})_{i,j\in\{1,2,3\}}$. Sei wieder $g := X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2$. Betrachte den Morphismus

$$\psi \colon V(g-1) \to \mathbb{A}^{3\times 3}, \quad x \mapsto f(x)$$

Wir wollen mit projektiver Eliminationstheorie zeigen, dass das Bild von φ $\mathbb{Q}$-Zariski-abgeschlossen ist. Erkläre dazu zunächst, weshalb

$$y \in \overline{\psi(V(g-1))} \implies \exists [x_0 : \ldots : x_4] \in \mathbb{P}^4 : (f(x) = x_0^2 y \,\&\, g(x) = x_0^2)$$

Du kannst hierzu zum Beispiel vom Ideal aus Theorem 2.7.5 ausgehen, dessen dortige Erzeuger bezüglich $\underline{X}$ homogenisieren und projektive Eliminationstheorie anwenden.

(c) Zeige mit Singular, dass

$$V(\{g\} \cup \{f_{ij} \mid i, j \in \{1,2,3\}\}) = \{0\} \subseteq \mathbb{A}^4$$

und begründe, weshalb dies zusammen mit (b) zeigt, dass $\psi(V(g-1))$ abgeschlossen ist.

(d) Erkläre, weshalb man aus den Berechnungen im Lückencode analog zur Aufgabe 1(c) auf Blatt 9 folgern kann, dass jeder Punkt im Bild von ψ genau zwei Urbilder besitzt.

(e) Zeige, dass jeder Punkt in $\psi(V(g-1)) \cap \mathbb{R}^{3\times 3}$ ein Urbild bezüglich ψ hat, welches auf der reellen Einheitssphäre $S = V(g-1) \cap \mathbb{R}^4$ liegt. Folgere $\mathrm{SO}_3 = \psi(S)$.

Hinweis: Zeige und beachte, dass $V(g-1)$ keine rein imaginären Elemente enthält. Nimm an, $y \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ hätte ein nichtreelles Urbild. Konstruiere unter Verwendung der komplexen Konjugation mehr als ein weiteres Urbild von y unter ψ und erhalte einen Widerspruch zu (d).

Abgabe bis Freitag, den 7. Februar 2020, 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411. Die Singular-Codes müssen zusätzlich per Email bis Freitag, den 7. Februar 2020, 23:59 Uhr an `alexander.taveira-blomenhofer@uni.kn` **geschickt werden.**