Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2019

Alexander Taveira Blomenhofer
Markus Schweighofer

Übungsblatt 10 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. Sei A ein Dedekindring. Zeige:

(a) Sind $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \in M_A$ paarweise verschieden und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, so gibt es ein $a \in A$ mit $v_{\mathfrak{p}_i}(a) = \alpha_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

(b) Ist M_A endlich, so ist A ein Hauptidealring.

Hinweis: Benutze für (a) den Chinesischen Restsatz.

Aufgabe 2. Sei A ein Integritätsring. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) A ist ein Dedekindring.

(b) A ist noethersch und jede Lokalisierung $A_\mathfrak{m}$ nach einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ von A ist ein Hauptidealring.

Hinweis: Für (a) $\Longrightarrow$ (b) kann man Aufgabe 2 des letzten Blattes zusammen mit obiger Aufgabe 1(b) benutzen. Für (b) $\Longrightarrow$ (a) beachte Aufgabe 1 des letzten Blattes.

Aufgabe 3. Sei A ein Integritätsring. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) A ist ein Dedekindring.

(b) Zu jedem Ideal I in A und jedem $a \in I \setminus \{0\}$ gibt es ein $b \in A$ mit $I = (a, b)$.

Hinweis: Für (a) $\Longrightarrow$ (b) betrachte Primidealzerlegungen von I und (a) und benutze Aufgabe 1(a). Für (b) $\Longrightarrow$ (a) wende Aufgabe 2 an: Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von A und $S := A \setminus \mathfrak{m}$. Um zu zeigen, dass $A_\mathfrak{m} = S^{-1}A$ ein Hauptidealring ist, zeige mit Hilfe der Voraussetzung (b), dass für jedes Ideal J von $A_\mathfrak{m}$ ein $b \in J$ existiert mit $J = JS^{-1}\mathfrak{m} + bA_\mathfrak{m}$. Wende das Nakayama-Lemma von Aufgabe 3 auf Blatt 9 auf den $A_\mathfrak{m}$-Modul $J/bA_\mathfrak{m}$ an, um $J = bA_\mathfrak{m}$ zu schließen.

Abgabe bis Mittwoch, den 26. Juni 2019, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.