Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2019

Alexander Taveira Blomenhofer
Markus Schweighofer

Übungsblatt 11 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. Ist der Oberring $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-5}}{2}\right]$ von $\mathscr{O}_{-5} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ein Gitter?

Aufgabe 2. Sei $x \in \mathbb{C}$ mit $x^3 + x^2 - 2x + 8 = 0$ und $K := \mathbb{Q}(x)$.

(a) Zeige, dass $f := X^3 + X^2 - 2X + 8$ das Minimalpolynom von x über $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Zeige, dass $\underline{v} := (1, x, x^2)$ eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums K ist.

(c) Bestimme die Darstellungsmatrix des K-Vektorraumendomorphismus

$$K \to K,\ a \mapsto a(3x^2 + 2x - 2)$$

bezüglich der Basis $\underline{v}$.

(d) Zeige $d_{K|\mathbb{Q}}(1, x, x^2) = -4 \cdot 503$ und folgere $d_{K|\mathbb{Q}}(1, x, y) = -503$ für $y := \frac{x^2+x}{2}$.

(e) Rechne nach, dass $x^2 = 2y - x$, $xy = x - 4$ und $y^2 = y - 2x - 2$ gilt.

(f) Zeige, dass $M := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ ein multiplikatives Gitter in K ist.

(g) Folgere, dass $\mathscr{O}_K = M$.

(h) Zeige, dass es für jedes $z \in M$ ein $a \in M$ und ein $\lambda \in \mathbb{Z}$ gibt mit $z^2 = \lambda z + 2a$.

(i) Zeige, dass für jedes $z \in \mathscr{O}_K$ die Diskriminante $d_{K|\mathbb{Q}}(1, z, z^2)$ gerade ist.

(j) Folgere, dass es kein z mit $\mathscr{O}_K = \mathbb{Z}[z]$ gibt.

Abgabe bis Mittwoch, den 3. Juli 2019, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.