
Übungsblatt 11 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. Sei R ein kommutativer noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal \mathfrak{m} der Krulldimension n . Seien $a_1, \dots, a_n \in R$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (a) a_1, \dots, a_n bilden ein Parametersystem von R .
- (b) a_1, \dots, a_n erzeugen ein \mathfrak{m} -primäres Ideal von R .

Aufgabe 2. Sei R ein kommutativer noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal \mathfrak{m} . Seien $a_1, \dots, a_r \in \mathfrak{m}$. Zeige:

- (a) $\dim R \geq \dim R/(a_1, \dots, a_r) \geq (\dim R) - r$
- (b) Genau dann kann a_1, \dots, a_r zu einem Parametersystem von R ergänzt werden, wenn $\dim(R/(a_1, \dots, a_r)) = (\dim R) - r$.
- (c) Ist a_1, \dots, a_r eine Nichtnullteilerfolge für den R -Modul R , so

$$\dim(R/(a_1, \dots, a_r)) = (\dim R) - r$$

und a_1, \dots, a_r kann daher gemäß (b) zu einem Parametersystem von R ergänzt werden.

Aufgabe 3. Sei R Cohen-Macaulay-Ring mit maximalem Ideal \mathfrak{m} und seien $a_1, \dots, a_r \in \mathfrak{m}$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (a) a_1, \dots, a_r bilden eine Nichtnullteilerfolge für den R -Modul R .
- (b) $\dim(R/(a_1, \dots, a_r)) = (\dim R) - r$
- (c) a_1, \dots, a_r können zu einem Parametersystem von R ergänzt werden.

Insbesondere sind die Parametersysteme von R gerade die nichtverlängerbaren Nichtnullteilerfolgen in \mathfrak{m} für den R -Modul R .

Abgabe bis Freitag, den 10. Juli, um 11:44 Uhr in die digitalen Briefkästen.