Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Michele Serra
Simon Müller
SS 2017

Universität Konstanz

Algebraische Zahlentheorie - Übungsblatt 2

Abgabe. Donnerstag, 11 Mai 2017, 10:00 Uhr, Briefkasten No. 19.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Ein kommutativer Ring heißt *noethersch*, wenn es für jede Folge

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$$

von Idealen ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, mit $I_n = I_{n+1} = \dots$

(a) Sei R ein noetherscher Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass jede Nichteinheit $a \in R \setminus \{0\}$ als Produkt von irreduziblen Elementen aus R geschrieben werden kann.

(b) Nehmen Sie jetzt an, dass jedes irreduzible Element aus R prim ist. Zeigen Sie, dass R faktoriell ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** (a) Zeigen Sie, dass $2,\ 3$ und $1+\sqrt{-5}$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass $2,\ 3$ und $1+\sqrt{-5}$ nicht paarweise assoziiert in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sind.

(c) Folgern Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ kein faktorieller Ring ist.
Hinweis: in (a) und (b), betrachten Sie die (multiplikative) Abbildung $N : \mathbb{Q}(\sqrt{-5}) \to \mathbb{Q},\ N(a+b\sqrt{-5}) = a^2+5b^2$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** (a) Zeigen Sie, dass die Ideale $\langle 2, 1+\sqrt{-5}\rangle, \langle 2, 1-\sqrt{-5}\rangle$ und $\langle 3, 1+\sqrt{-5}\rangle$ prim in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sind.
Bemerkung: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\langle 3, 1-\sqrt{-5}\rangle$ prim ist und dass

$$\langle 2, 1+\sqrt{-5}\rangle\langle 2, 1-\sqrt{-5}\rangle = \langle 2\rangle$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned}\langle 3, 1+\sqrt{-5}\rangle\langle 3, 1-\sqrt{-5}\rangle &= \langle 3\rangle;\\ \langle 2, 1+\sqrt{-5}\rangle\langle 3, 1+\sqrt{-5}\rangle &= \langle 1+\sqrt{-5}\rangle;\\ \langle 2, 1-\sqrt{-5}\rangle\langle 3, 1-\sqrt{-5}\rangle &= \langle 1-\sqrt{-5}\rangle;\end{aligned}$$

$$\langle 2, 1+\sqrt{-5}\rangle\langle 2, 1-\sqrt{-5}\rangle\langle 3, 1+\sqrt{-5}\rangle\langle 3, 1-\sqrt{-5}\rangle = \langle 6\rangle.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $D \in \mathbb{Z}$ quadratfrei. Sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt{D})$.

(a) Sei $D < 0$. Berechnen Sie die Menge der Einheiten von $\mathcal{O}_K$.

(b) Sei $D = 2$. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ so dass $u := a + b\sqrt{2} > 1$ eine Einheit in $\mathcal{O}_K$ ist. Zeigen Sie, dass $a \geq 1$ und $b \geq 1$.

(c) Sei $D = 2$. Zeigen Sie, dass $1 + \sqrt{2}$ eine Einheit in $\mathcal{O}_K$ ist. Zeigen Sie, dass, falls $u > 1$ eine Einheit in $\mathcal{O}_K$ ist, ein $k \in \mathbb{N}$ mit $u = (1 + \sqrt{2})^k$ existiert.

(d) Sei $D = 2$. Folgern Sie, dass
$$\{\pm(1 + \sqrt{2})^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$
die Menge der Einheiten von $\mathcal{O}_K$ ist.

Hinweis: Behandeln Sie die Fälle $D = -1$ und $D = -3$ in Teil (a) getrennt.