Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Michele Serra
Simon Müller
SS 2017

Universität Konstanz

Algebraische Zahlentheorie - Übungsblatt 3

Abgabe. Donnerstag, 18 Mai 2017, 10:00 Uhr, Briefkasten No. 19.

Ringe sind immer kommutativ mit Eins.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Der *Torsionmodul* M_{tor} von M ist die Menge derjenigen Elemente $m \in M$, für die ein Nichtnullelement $r \in R$ mit $rm = 0$ existiert.

(a) Zeigen Sie, dass M_{tor} ein Untermodul von M ist.

(b) Seien M, N R-Moduln. Zeigen Sie, dass

$$(M \oplus N)_{tor} = M_{tor} \oplus N_{tor}$$

gilt.

(c) Seien M, N R-Moduln. Sei $\varphi : M \to N$ ein R-Homomorphismus. Zeigen Sie, dass

$$\varphi(M_{tor}) \subseteq N_{tor}$$

gilt.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Seien R ein Ring, M ein R-Modul, T und S Untermoduln von M. Beweisen Sie, dass

$$(S + T)/T \cong S/(S \cap T)$$

gilt.
Zeigen Sie ferner, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(1) $M = T \bigoplus S$

(2) $M = T + S$ und $T \cap S = \{0\}$

(3) Jedes $m \in M$ lässt sich eindeutig schreiben als $m = t + s$ mit $t \in T, s \in S$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei R ein Ring, M ein R-Modul und $N \leq M$ ein Untermodul. Beweisen Sie, dass

(a) M endlich erzeugt $\Longrightarrow M/N$ endlich erzeugt.

(b) N und M/N endlich erzeugt $\Longrightarrow M$ endlich erzeugt.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Sei R ein Ring, M ein R-Modul, S eine Teilmenge von M. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(a) M ist frei mit Basis S

(b) $M = \bigoplus_{s \in S} Rs$