Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Michele Serra
Simon Müller
SS 2017

Universität Konstanz

Algebraische Zahlentheorie - Übungsblatt 4

Abgabe. Mittwoch, 24 Mai 2017, 10:00 Uhr, Briefkasten No. 19.

Ringe sind immer kommutativ mit Eins.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** (a) Geben Sie ein Beispiel für einen Ring R und einen Untermodul eines endlich erzeugten R-Moduls an, so dass dieser Untermodul nicht endlich erzeugt ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel für einen Hauptidealbereich R und einen torsionsfreien R-Modul an, der nicht frei ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Sei R ein Ring mit der folgenden Eigenschaft: für jeden freien R-Modul M und jeden nichttrivialen Untermodul $N < M$ ist N frei. Zeigen Sie, dass R ein Hauptidealbereich ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Gegeben sei die Verknüpfung

$$K[x] \times V \longrightarrow V,\ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^i, v\right) \mapsto a_n \varphi^n(v) + \ldots + a_1\varphi(v) + a_0 v.$$

Zeigen Sie, dass V mit dieser Verknüpfung ein $K[x]$-Modul ist.
Sei nun V endlichdimensional und φ injekitv. Zeigen Sie, dass V ein endlich erzeugter $K[x]$-Torsionsmodul ist.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Sei V ein $K[x]$-Modul.

(a) Zeigen Sie, dass V als K-Vektorraum aufgefasst werden kann.

(b) Zeigen Sie, dass eine eindeutige K-lineare Abbildung von $K[x]$-Moduln $\varphi\colon V \to V$ existiert, so dass die Skalarmultiplikation auf V (als $K[x]$-Modul betrachtet) durch

$$f(x) \cdot v = f(\varphi)(v) \quad \forall f \in K[x],\ v \in V$$

definiert ist.

(c) Folgern Sie, dass es eine Bijektion zwischen der Menge der $K[x]$-Moduln und der Menge der Paare (V, φ) gibt, wobei V ein K-Vektorraum ist und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung.

Zusatzaufgabe für Interessierte (2 Punkte)**.** (a) Seien K ein Körper und $\lambda \in K$. Betrachten Sie den $K[x]$-Modul $K[x]/\langle (x-\lambda)^n \rangle$ als K-Vektorraum mit der linearen Abbildung

$$\varphi_x \colon K[x]/\langle (x-\lambda)^n \rangle \to K[x]/\langle (x-\lambda)^n \rangle,\ m \mapsto x \cdot m.$$

Zeigen Sie, dass

$$(x-\lambda)^{n-1} + \langle (x-\lambda)^n \rangle,\ (x-\lambda)^{n-2} + \langle (x-\lambda)^n \rangle, \ldots, (x-\lambda) + \langle (x-\lambda)^n \rangle,\ 1 + \langle (x-\lambda)^n \rangle$$

eine Basis für $K[x]/\langle (x-\lambda)^n \rangle$ ist. Zeigen Sie ferner, dass die Matrixdarstellung von φ_x bezüglich dieser Basis

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ist.

(b) Seien K ein algebraisch abgeschlossener Körper, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Benutzen Sie den Struktursatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealbereichen um zu zeigen, dass eine Basis $\mathcal{B}$ für V existiert, für die die Matrixdarstellung von φ bezüglich $\mathcal{B}$ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & J_n \end{pmatrix}$$

hat, wobei die J_i Jordanzellen sind.