Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Michele Serra
Simon Müller
SS 2017

Universität Konstanz

# Algebraische Zahlentheorie - Übungsblatt 5

**Abgabe.** Donnerstag, 1. Juni 2017, 10:00 Uhr, Briefkasten No. 19.

Ringe sind immer kommutativ mit Eins.

**Aufgabe 1** (3 Punkte)**.** Betrachten Sie den Struktursatz für endlich erzeugte Moduln über HIR (Korollar 6.4). Formulieren Sie eine analoge Behauptung im Fall von endlich erzeugten abelschen Gruppen.
Geben Sie ferner eine feinere Formulierung im Fall von endlichen abelschen Gruppen an.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)**.**

1. Wie viele $\mathbb{Z}$-Moduln der Mächtigkeit 180 gibt es (bis auf Isomorphie)?
2. Wie viele abelsche Gruppe der Mächtigkeit 1350 gibt es (bis auf Isomorphie)?

**Aufgabe 3** (5 Punkte)**.** Beweisen Sie die folgenden Behauptungen (vgl. Bemerkung 6.5):

(i) Sei $0 \neq M = M[p^\nu]$ ein $p^\nu$-Torsionsmodul. Ist $x \neq 0$, $x \in M$, dann ist eine Periode für $x$ (bis auf Einheit) der Gestalt $p^l$ mit $l \leq \nu$;

(ii) ist $\nu$ minimal mit der Eigenschaft $M = M[p^\nu]$, so gibt es ein $x \in M$ mit Periode genau $p^\nu$.

(iii) Sei $x_1 \in M$ mit Periode $p^\nu$; setze $\overline{M} := M/Rx_1$. Es gilt $\overline{M} = \overline{M}[p^\nu]$ und für jeden Vertreter $y$ von $\bar{y} \in \bar{M}$ mit Perioden $p^l$ beziehungsweise $p^{\bar{l}}$ gilt $l \geq \bar{l}$.

(iv) Ist $p^\nu$ minimal mit der Eigenschaft $M = M[p^\nu]$ und $p^\mu$ minimal mit der Eigenschaft $\bar{M} = \bar{M}[p^\mu]$, dann gilt $\mu \leq \nu$.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)**.** Sei $R$ ein Ring und $M$ ein $R$-Modul. Wir bezeichnen mit $\mathrm{End}(M)$ die abelsche Gruppe der $R$-Homomorphismen von $M$ nach $M$. Die Addition in $\mathrm{End}(M)$ ist durch

$$\varphi + \psi \colon M \to M,\ m \mapsto \varphi(m) + \psi(m)$$

gegeben.
Sei $R$ ein Hauptidealbereich und $M$ ein endlich erzeugter $R$-Torsionsmodul. Sei $\mathcal{P}$ die endliche Menge der Primelemente $p \in R$ mit $M[p^\infty] \neq 0$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$M = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} M[p^\infty].$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{End}(M) = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} \mathrm{End}(M[p^\infty]).$$