Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Michele Serra
Simon Müller
SS 2017

Universität Konstanz

Algebraische Zahlentheorie - Übungsblatt 7

Abgabe. Donnerstag, 15. Juni 2017, 10:00 Uhr, Briefkasten No. 19.

Ringe sind immer kommutativ mit Eins.

Aufgabe 1. (a) Sei A ein noetherscher Integritätsbereich und sei $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge ohne Null. Zeigen Sie, dass $S^{-1}A$ noethersch ist.

(b) Ein Ring heißt *lokal* falls er genau ein maximales Ideal besitzt. Zeigen Sie, dass ein Ring R genau dann lokal ist, wenn die Menge der Nichteinheiten $R \setminus R^\times$ ein Ideal ist.

Im Folgenden sind $A \subseteq B$ Ringe und B sei ganz über A. Die Ideale von A und B schreiben wir in Frakturschrift: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n} \ldots$

Aufgabe 2. In dieser Übungsaufgabe wird gezeigt, dass Ganzheit erhaltet bleibt wenn wir zu Quotienten oder Lokalisierungen übergehen.

(a) Sei $\mathfrak{b}$ ein Ideal von B und sei $\mathfrak{a} := \mathfrak{b} \cap A$. Zeigen Sie, dass $B/\mathfrak{b}$ ganz über $A/\mathfrak{a}$ ist.

(b) Sei S eine multiplikative Teilmenge von A ohne Null. Zeigen Sie, dass wenn A ganz abgeschlossen ist, dann auch $S^{-1}A$.

Zeigen Sie ferner, dass $S^{-1}B$ ganz über $S^{-1}A$ ist.

Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie, dass B genau dann ein Körper ist, wenn A ein Körper ist.

(b) Sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal von B. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{q}$ genau dann maximal ist, wenn $\mathfrak{p} := \mathfrak{q} \cap A$ ein maximales Ideal von A ist.

Hinweis: Wenden Sie die Aufgaben 2 und 3.(a) an.

(c) Seien $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}'$ Primideale von B mit $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{q}' \cap A$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$.

Hinweis: Wenden Sie Aufgabe 2 auf $A_\mathfrak{p}$ an, dann benutzen Sie 3.(b).

Aufgabe 4. (a) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A. Zeigen Sie, dass ein Primideal $\mathfrak{q}$ von B existiert mit $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.

Hinweis. Betrachten Sie ein maximales Ideal $\mathfrak{n}$ von $B_\mathfrak{p}$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{m} := \mathfrak{n} \cap A_\mathfrak{p}$ maximal in $A_\mathfrak{p}$ ist.

(b) Seien $\mathfrak{p}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{p}_n$ Primideale von A, $\mathfrak{q}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{q}_m$ Primideale von B mit $m < n$ und $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ f.a. $i = 1, \ldots, m$. Zeigen Sie, dass Primideale $\mathfrak{q}_{m+1} \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{q}_n$ von B existieren, so dass $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ f.a. $i = 1, \ldots, n$.

Hinweis. Betrachten Sie zunächst den Fall $m = 1,\ n = 2$. Beweisen Sie die Ausssage dann per Induktion.

Zusatzaufgabe für Interessierte. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass $K[X,Y]/(X^2 - Y^3)$ ein nicht ganz abgeschlossener Integritätsbereich ist.