Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Michele Serra
Simon Müller
SS 2017

Universität Konstanz

Algebraische Zahlentheorie - Übungsblatt 8

Abgabe. Donnerstag, 22. Juni 2017, 10:00 Uhr, Briefkasten No. 19.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Seien $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ und $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Berechnen Sie $N_{L/\mathbb{Q}}(\sqrt{3})$, $N_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt{3})$, $\mathrm{Sp}_{L/\mathbb{Q}}(\sqrt{3})$, $\mathrm{Sp}_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt{3})$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei γ eine Nullstelle des irreduziblen Polynoms $X^3 - X - 1$ und sei $K = \mathbb{Q}(\gamma)$. In dieser Übungsaufgabe wird die Spur eines beliebigen Elements $a + b\gamma + c\gamma^2$ (fast) ohne Matrixdarstellungen berechnet. Wir schreiben Sp für $\mathrm{Sp}_{K/\mathbb{Q}}$.

(a) Berechnen Sie zunächst $\mathrm{Sp}(1)$ und $\mathrm{Sp}(\gamma)$.

Hinweis: Für $\mathrm{Sp}(\gamma)$ betrachten Sie das charakteristisches Polynom von γ über $\mathbb{Q}$.

(b) Verwenden Sie die Matrixdarstellung der Multiplikation mit γ^2 bezüglich der Basis $\{1, \gamma, \gamma^2\}$, um $\mathrm{Sp}(\gamma^2)$ zu berechnen.

(c) Wenden Sie die Linearität der Spur an und berechnen Sie $\mathrm{Sp}(a + b\gamma + c\gamma^2)$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $B : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform. Definiere für $x \in V$ die lineare Form $B_x : V \to K$ durch $B_x(y) = B(x, y)$.
Dann heißt B *nicht ausgeartet*, falls $Bx \neq 0$ für jedes $0 \neq x \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass B nicht ausgeartet ist genau dann wenn $\det \mathbb{B} \neq 0$ für jede Matrixdarstellung $\mathbb{B}$ von B.

(b) Betrachten Sie die lineare Abbildung $\varphi_B : V \longrightarrow V^*$, $x \mapsto B_x$. Zeigen Sie, dass B nicht ausgeartet ist genau dann wenn $\ker \varphi_B = \{0\}$.

Folgern Sie, dass B nicht ausgeartet ist genau dann wenn φ_B ein Isomorphismus ist.

(c) Nehmen Sie jetzt an, dass B nicht ausgeartet ist. Sei $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Setze $w_i := \varphi_B^{-1}(v_i^*)$. Zeigen Sie, dass $B(v_i, w_j) = \delta_{ij}$, $\forall i, j$.

Die Basis $\{w_1, \ldots, w_n\}$ heißt die zu $\mathcal{B}$ *B-duale* Basis von V.

(d) Zeigen Sie, dass die B-duale Basis $c_i = B(v, w_i)$ für jedes $v \in V$ mit $v = \sum c_i v_i$ erfüllt.

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.** Sei L/K eine separable Körpererweiterung. Betrachten Sie die Abbildung

$$B_{L/K} : L \times L \longrightarrow K,\ B_{L/K}(x, y) \mapsto \mathrm{Sp}_{L/K}(xy).$$

Zeigen Sie, dass $B_{L/K}$ eine symmetrische Bilinearform ist.