Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Michele Serra
Simon Müller
SS 2017

Universität Konstanz

Algebraische Zahlentheorie - Übungsblatt 9

Abgabe. Donnerstag, 29. Juni 2017, 10:00 Uhr, Briefkasten No. 19.

Aufgabe 1. Sei K ein Körper und L eine endliche separable Körpererweiterung von K vom Grad $[L : K] = n$. Seien Ω die normale Hülle von L/K und $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ die paarweise verschiedenen K-Einbettungen von L nach Ω. Sei $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ eine Basis für L/K und $\mathbb{B}$ eine Matrixdarstellung von $B_{L/K}$ bezüglich dieser Basis. Zeigen Sie, dass

$$\det \mathbb{B} = (\det(\sigma_i(\beta_j)))^2.$$

Folgern Sie, dass $\det \mathbb{B} \neq 0$ gilt.

Aufgabe 2. Sei R ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich mit Quotientenkörper K. Sei L eine separable Körpererweiterung von K mit $[L : K] = n$ und sei $S := \overline{R}^L$ der ganze Abschluß von R in L. Sei $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ eine Basis für L/K. Definiere die R-Moduln

$$M := \sum_{i=1}^{n} R\beta_i \quad \text{und} \quad M' := \{\alpha \in L \mid \operatorname{Sp}_{L/K}(\alpha\gamma) \in R \text{ für alle } \gamma \in M\}.$$

Zeigen Sie, dass $M \subseteq S \subseteq M'$ gilt.

Aufgabe 3. Sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ein quadratischer Körper mit $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei.
In dieser Übungsaufgabe wird eine Ganzheitsbasis für $\mathcal{O}_L$ als $\mathbb{Z}$-Modul berechnet.
Sie können das folgende Resultat, das in der Vorlesung bewiesen wird, verwenden:
Satz von Stickelberger. Sei L ein Zahlkörper. Dann gilt

$$D(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}) \equiv 0 \text{ oder } D(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}) \equiv 1 \mod 4.$$

(a) Sei $d \equiv 2, 3 \mod 4$.

- Berechnen Sie die Diskriminante $D(f)$ des Minimalpolynoms f des primitiven Elements $\sqrt{d}$.
- Zeigen Sie, dass $D(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}) \equiv 0 \mod 4$.
- Zeigen Sie, dass $\{1, \sqrt{d}\}$ eine Ganzheitsbasis ist.

(b) Sei nun $d \equiv 1 \mod 4$. Zeigen Sie, dass $\left\{1, \frac{1+\sqrt{d}}{2}\right\}$ eine Ganzheitsbasis ist.

Aufgabe 4. Sei $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ein allgemeines Polynom vom Grad 3 über $\mathbb{Q}$. Wir berechnen die Diskriminante $D(f)$ in Abhängigkeit von a, b, c.

(a) Substituieren Sie $x = y - a/3$, um ein Polynom der Form $g(y) = y^3 + py + q$ zu erhalten. Begründen Sie, dass f und g denselben Zerlegungskörper haben.

Folgern Sie, dass sie dieselbe Diskriminante haben.

(b) Seien α, β, γ die Nullstellen von g, also $g(y) = (y - \alpha)(y - \beta)(y - \gamma)$. Zeigen Sie, dass

$$D(g) = -g'(\alpha)g'(\beta)g'(\gamma).$$

(c) Drücken Sie $D(g)$ in Abhängigkeit von p und q aus (benutzen sie hierzu die Beziehung zwischen Nullstellen und Koeffizienten). Verwenden Sie dann, dass f und g die gleiche Diskrimante haben, um $D(f)$ in Abhängigkeit von a, b und c anzugeben.

Zusatzaufgabe für Interessierte. Sei $p > 2$ eine Primzahl und ζ eine primitive p-te Einheitswurzel. Betrachten Sie das p-zyklotomisches Polynom

$$\Phi_p(X) := X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1 = \prod_{i=1}^{p-1}(X - \zeta_i),$$

wobei die ζ_i die zu ζ konjugierten p-ten Einheitswurzeln bezeichnen. Zeigen Sie, dass

$$D(\Phi_p(X)) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p^{p-2}.$$