Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Michele Serra
Simon Müller
SS 2017

Universität Konstanz

Algebraische Zahlentheorie - Übungsblatt 10

Abgabe. Donnerstag, 6. Juli 2017, 10:00 Uhr, Briefkasten No. 19.

Aufgabe 1 (2 Punkte).

1. Seien ϑ eine Nullstelle von $f(x) = x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ und $K = \mathbb{Q}(\vartheta)$. Zeigen Sie, dass $f(x)$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist, und dass $\{1, \vartheta, \vartheta^2\}$ eine Ganzheitsbasis ist.
2. Seien ϑ eine Nullstelle von $g(x) = x^3 + x + 4 \in \mathbb{Q}[x]$ und $K = \mathbb{Q}(\vartheta)$. Zeigen Sie, dass $g(x)$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist, und dass $\{1, \vartheta, \vartheta^2\}$ eine Ganzheitsbasis ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte). Sei K ein Zahlkörper vom Grad n über $\mathbb{Q}$ und sei $\mathcal{B} := \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \subseteq \mathcal{O}_K$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $K/\mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft, dass $|D(\omega_1, \ldots, \omega_n)| \in \mathbb{N}$ minimal ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Ganzheitsbasis ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte). Sei ϑ eine Nullstelle von $f(x) = x^3 - x^2 - 2x - 8 \in \mathbb{Q}[x]$ und $K = \mathbb{Q}(\vartheta)$.

(a) Zeigen Sie, dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Sei $\beta = \frac{\vartheta + \vartheta^2}{2}$. Zeigen Sie, dass $\beta^3 - 3\beta^2 - 10\beta - 8 = 0$.

(c) Zeigen Sie, dass $D(1, \vartheta, \beta) = -503$. Folgern Sie, dass $\{1, \vartheta, \beta\}$ eine Ganzheitsbasis ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Seien ϑ und $K = \mathbb{Q}(\vartheta)$ wie in Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass $D(1, y, y^2)$ gerade ist für jedes $y \in \mathcal{O}_K$.
Folgern Sie, dass es kein $y \in \mathcal{O}_K$ gibt, so dass $\{1, y, y^2\}$ eine Ganzheitsbasis ist.