Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Michele Serra
Simon Müller
SS 2017

Universität Konstanz

Algebraische Zahlentheorie - Übungsblatt 11

Abgabe. Donnerstag, 13. Juli 2017, 10:00 Uhr, Briefkasten No. 19.

Sei ∞ ein bezüglich $\mathbb{Z}$ neues Element. Setze:

$$n \leq \infty \text{ und } n + \infty = \infty + n = \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}.$$

Sei K ein Körper. Dann heißt eine surjektive Abbildung $v\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ eine *diskrete Bewertung*, wenn die folgende Eigenschaften erfüllt sind für alle $a, b \in K$:

1. $v(ab) = v(a) + v(b)$;
2. $v(a) = \infty \iff a = 0$;
3. $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$.

Der Unterring $R = \{a \in K \mid v(a) \geq 0\}$ heißt der *Bewertungsring* von v. Ein Unterring von K heißt ein *diskreter Bewertungsring,* falls er der Bewertungsring einer diskreten Bewertung ist.

In diesem und im nächsten Übungsblatt werden wir zeigen, dass ein Integritätsbereich genau dann ein Dedekindring ist, wenn er Noethersch ist und alle seine Lokalisierungen bezüglich maximalen Idealen diskrete Bewertungsringe sind.

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** (a) Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Definiere die Abbildung

$$v_p\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\},\ v_p\left(p^n \frac{a}{b}\right) = n \text{ und } v(0) = \infty,$$

wobei $a, b, n \in \mathbb{Z}$ und p weder a noch b teilt.

Zeigen Sie, dass v_p eine wohldefinierte diskrete Bewertung ist und beschreiben Sie den Bewertungsring.

(b) Sei K ein Körper. Definiere die Abbildung

$$v\colon K(x) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\},\ v\left(\frac{f}{g}\right) = \deg f - \deg g \text{ und } v(0) = \infty$$

wobei $f, g \in K[x] \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass v eine wohldefinierte diskrete Bewertung ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Sei K ein Körper, $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ eine diskrete Bewertung und R der zugehörige Bewertungsring. Sei $t \in R$ mit $v(t) = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass $r \in R$ genau dann eine Einheit ist, wenn $v(r) = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass jedes Element aus $R \setminus \{0\}$ von der Form ut^n ist, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $u \in R^\times$.

(c) Zeigen Sie, dass R ein ganz abgeschlossener Hauptidealbereich ist.

(d) Zeigen Sie, dass R genau ein nichttriviales Primideal besitzt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei R ein Hauptidealbereich mit einem einzigen nichttrivialen Primideal $\mathfrak{m} = \langle t \rangle$. Sei K der Quotientenkörper von R.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes Element $x \in K^\times$ eindeutige $n \in \mathbb{Z}$ und $u \in R^\times$ mit $x = ut^n$ existieren.

(b) Zeigen Sie, dass R ein diskreter Bewertungsring ist

Hinweis. Betrachten Sie die Funktion $v\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ definiert durch $ut^n \mapsto n$ und $0 \mapsto \infty$ für $n \in \mathbb{Z},\ u \in R^\times$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei R ein noetherscher lokaler Integritätsbereich mit maximalen Ideal $\mathfrak{m} = \langle t \rangle$.

(a) Zeigen Sie, dass R ein Hauptidealbereich ist.

(b) Zeigen Sie, dass R genau ein nichttriviales Primideal besitzt.

Zusatzaufgabe für Interessierte (2 Punkte)**.** Mit Notation und Annahmen von Aufgabe 4, zeigen Sie, dass $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = 0$.