Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Michele Serra
Simon Müller
SS 2017

Universität Konstanz

Algebraische Zahlentheorie - Übungsblatt 12

Abgabe. Donnerstag, 20. Juli 2017, 10:00 Uhr, Briefkasten No. 19.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei R ein Integritätsbereich und $\mathcal{M}$ die Menge der maximalen Ideale von R.

(a) Zeigen Sie, dass $R = \cap_{\mathfrak{m}\in\mathcal{M}} R_{\mathfrak{m}}$.

Hinweis. Betrachten Sie für $r \in \cap_{\mathfrak{m}\in\mathcal{M}} R_{\mathfrak{m}}$ das Ideal

$$I_r = \{x \in R | rx \in R\} \lhd R.$$

(b) Sei nun $\{R_i | i \in I\}$ die Menge der ganz abgeschlossenen Unterringe von R. Zeigen Sie, dass $\cap_{i\in I} R_i$ ganz abgeschlossen ist.

(c) Zeigen Sie, dass R genau dann ganz abgeschlossen ist, wenn, für jedes $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}$ der Ring $R_{\mathfrak{m}}$ ganz abgeschlossen ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei R ein ganz abgeschlossener noetherscher Integritätsbereich der genau ein nichttriviales Primideal $\mathfrak{m}$ besitzt.

(a) Sei $0 \neq I \lhd R$. Zeigen Sie, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $\mathfrak{m}^n \subseteq I$.

(b) Zeigen Sie, dass ein $t \in R$ derart existiert, dass für alle $s \in \mathfrak{m}$ gilt:

$$\langle t \rangle \subseteq \langle s \rangle \Longrightarrow \langle t \rangle = \langle s \rangle.$$

(c) Zeigen Sie, dass $\langle t \rangle = \mathfrak{m}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei R ein Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass R genau dann ein Dedekindring ist, wenn er noethersch ist und für jedes maximales Ideal $\mathfrak{m}$ die Lokalisierung $R_{\mathfrak{m}}$ ein diskreter Bewertungsring ist.
Hinweis. Aufgaben 1, 2 und Übungsblatt 11.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei R ein Dedekindring und K der Quotientenkörper von R. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R. Wir definieren eine Abbildung $v_{\mathfrak{p}} : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ durch

$$v_{\mathfrak{p}}(a) = \begin{cases} n \text{ wenn } aR = \mathfrak{p}^n \cdot \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_m \\ \infty \text{ wenn } a = 0 \end{cases}$$

wobei die $\mathfrak{p}_i$ von $\mathfrak{p}$ verschiedene Primidealen sind.

(a) Zeigen Sie, dass $v_{\mathfrak{p}}$ eine diskrete Bewertung auf K ist. Sie heißt die $\mathfrak{p}$-*adische Bewertung.*

(b) Sei $R_{v_{\mathfrak{p}}}$ der Bewertungsring von $v_{\mathfrak{p}}$. Zeigen Sie, dass $R_{v_{\mathfrak{p}}} = R_{\mathfrak{p}}$.