Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Michele Serra
Simon Müller
SS 2017

Universität Konstanz

Algebraische Zahlentheorie - Übungsblatt 13

Abgabe. Dieses Übungsblatt muss nicht abgegeben werden. Lösungen werden auf der Webseite von Michele veröffentlicht. Es wird jedoch ausdrücklich empfohlen, diese Aufgaben zu bearbeiten!

Aufgabe 1. Seien τ eine reelle Zahl und $s, t \in \mathbb{N}$.
Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass das Volumen von

$$X(s,t,\tau) := \{(x_1, \ldots, x_s, a_1, b_1, \ldots, a_t, b_t) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{2t} \colon \sum_{i=1}^{s} |x_i| + 2\sum_{j=1}^{t} |a_j^2 + b_j^2|^{\frac{1}{2}} \leq \tau\}$$

gleich

$$2^s \left(\frac{\pi}{2}\right)^t \frac{\tau^{s+2t}}{(s+2t)!}$$

ist. Sei

$$Y(s,t,\tau) := \{(x_1, \ldots, x_s, a_1, b_1, \ldots, a_t, b_t) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{2t} \colon x_1, \ldots, x_s \geq 0\} \cap X(s,t,\tau).$$

(a) Zeigen Sie per Induktion nach s, dass das Volumen von $Y(s, 0, \tau)$ gleich $\tau^s/s!$ ist
Hinweis. Fubini.

(b) Angenommen, dass das Volumen von $Y(s,t,\tau)$ durch

$$2^s \left(\frac{\pi}{2}\right)^t \frac{\tau^{s+2t}}{(s+2t)!}$$

gegeben ist. Zeigen Sie, dass dann das Volumen von $Y(s, t+1, \tau)$

$$\left| \int_{r=0}^{\tau/2} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \frac{(\tau - 2r)^{s+2t}}{(s+2t)!} (\pi/2)^t r dr d\vartheta \right|$$

beträgt. **Hinweis.** Polarkoordinaten.

(c) Zeigen Sie per Induktion nach $s + 2t$, dass das Volumen von $Y(s,t,\tau)$ durch

$$\frac{(\pi/2)^t \tau^{s+2t}}{(s+2t)!}$$

gegeben ist.

(d) Folgern Sie, dass das Volumen von $X(s,t,\tau)$ durch

$$2^s\left(\frac{\pi}{2}\right)^t\frac{\tau^{s+2t}}{(s+2t)!}$$

gegeben ist.

Aufgabe 2. Sei L ein Zahlkörper und $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ eine Basis von $L|\mathbb{Q}$. Seien

$$v_i := (\sigma_1(\alpha_i),\dots,\sigma_s(\alpha_i),\operatorname{Re}\sigma_{s+1}(\alpha_i),\operatorname{Im}\sigma_{s+1}(\alpha_i),\dots,\operatorname{Re}\sigma_{s+t}(\alpha_i),\operatorname{Im}\sigma_{s+t}(\alpha_i))\in\mathbb{R}^{s+2t}$$

und sei $A=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$ (vgl. Vorlesung 22).

Erinnerung: in der Vorlesung wurde die Matrix $\mathcal{V}$ eingeführt:

$$\mathcal{V}=\begin{pmatrix}\sigma_1(\alpha_1) & \dots & \sigma_s(\alpha_1) & \sigma_{s+1}(\alpha_1) & \overline{\sigma_{s+1}(\alpha_1)} & \dots & \sigma_{s+t}(\alpha_1)\overline{\sigma_{s+t}(\alpha_1)}\\ & \vdots & \vdots & & & & \\ \sigma_1(\alpha_n) & \dots & \sigma_s(\alpha_n) & \sigma_{s+1}(\alpha_n) & \overline{\sigma_{s+1}(\alpha_n)} & \dots & \sigma_{s+t}(\alpha_n)\overline{\sigma_{s+t}(\alpha_n)}\end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\det A=\left(\frac{1}{2}i\right)^t\det\mathcal{V}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei T das fundamentale Parallelotop eines vollständigen Gitters Γ und sei $w_1,\dots,w_n$ eine $\mathbb{Z}$-Basis für Γ. Setze $A=\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass $v(T)=|\det A|$ gilt.

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Idealklassengruppe von $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$.
Hinweis. Übungsblatt 2, Aufgabe 3.

Aufgabe 5. Sei $0<d\in\mathbb{Z}$ quadratfrei. Zeigen Sie, dass die Gleichungen

$$x^2-dy^2=1 \text{ für } d\equiv 2,3 \mod 4 \tag{1}$$

$$x^2-dy^2=4 \text{ für } d\equiv 1 \mod 4 \tag{2}$$

unendlich viele Lösungen haben.