

## Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

### Blatt 2

**Abgabe ihrer Lösung:** Bis Donnerstag, 7. November 2019, 09:55 Uhr, in den Briefkasten ihres Tutors im Gebäude F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, schreiben Sie ihren Namen und den Namen ihres Tutors auf jedes Blatt und heften Sie ihre einzelnen Blätter zusammen.

#### Aufgabe 2.1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie mithilfe des Euklidischen Algorithmus und seiner Umkehrung:

- (a)  $\text{ggT}(193, 60)$
- (b) Zwei ganze Zahlen  $x, y \in \mathbb{Z}$  so, dass  $169x + 144y = 1$
- (c) Das multiplikative Inverse von 4 in  $\mathbb{Z}_{19}$
- (d) Das multiplikative Inverse von 10 in  $\mathbb{Z}_{27}$

Geben Sie die Zwischenschritte an!

#### Aufgabe 2.2 (4 Punkte)

Schreiben Sie die Verknüpfungstafeln für die Addition und Multiplikation in  $\mathbb{Z}_n$  auf und bestimmen Sie die multiplikativ invertierbaren Elemente von  $\mathbb{Z}_n$  für  $n = 5, 6$ .

#### Aufgabe 2.3 (4 Punkte)

Finden Sie für folgende Werte von  $n$  jeweils alle Elemente  $x \in \mathbb{Z}_n$ , die der Gleichung genügen. (Beachten Sie, dass die Lösungsmenge auch leer sein kann!)

- (a)  $n = 5, \quad 3 \cdot_5 x = 1$
- (b)  $n = 11, \quad x^2 +_{11} 1 = 0$  (wobei  $x^2 = x \cdot_{11} x$ )
- (c)  $n = 9, \quad x^3 = 0$  (wobei  $x^3 = x \cdot_9 x \cdot_9 x$ )
- (d)  $n = 12, \quad 2 \cdot_{12} x = 3$

#### Aufgabe 2.4 (4 Punkte)

Es seien die Operationen  $+_n$  und  $\cdot_n$  definiert wie in der Vorlesung. Da wurde gezeigt, dass  $(\mathbb{Z}_n, +_n)$  eine abelsche Gruppe ist.

Das Ziel dieser Übungsaufgabe ist zu zeigen, dass  $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$  ein kommutativer Ring mit Eins ist. Zeigen Sie:

- (a) Die Operation  $\cdot_n$  ist assoziativ.
- (b) Die Operation  $\cdot_n$  ist kommutativ.
- (c) 1 ist ein neutrales Element bezüglich  $\cdot_n$ .
- (★) Es fehlt noch der Nachweis des Distributivgesetzes. Dessen Gültigkeit wird in der Plenumsübung am 12. November bewiesen und muss hier nicht gezeigt werden. Wir würden Ihnen trotzdem empfehlen, sich hierzu im Voraus Gedanken zu machen.