Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Simon Müller
Michele Serra
Wintersemester 2019/2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 4

Abgabe ihrer Lösung: Bis Donnerstag, 21. November 2019, 09:55 Uhr, in den Briefkasten ihres Tutors im Gebäude F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, schreiben Sie ihren Namen und den Namen ihres Tutors auf jedes Blatt und heften Sie ihre einzelnen Blätter zusammen.

Aufgabe 4.1 *(4 Punkte)*

Bringen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme über $\mathbb{Q}$ zunächst in reduzierte Zeilenstufenform und bestimmen Sie anschließend (mit Begründung!) ihre Lösungsmengen.

$$\text{(a)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{(b)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 16 & 42 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 2 \end{array}\right) \qquad \text{(c)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Aufgabe 4.2 *(4 Punkte)*

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und M eine $(n \times n)$-Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie: Das homogene lineare Gleichungssystem $Mx = 0$ hat genau dann in $\mathbb{R}$ eine nichttriviale (d.h. von 0 verschiedene) Lösung, wenn es in $\mathbb{Q}$ eine nichttriviale Lösung hat.

Aufgabe 4.3 *(3 Punkte)*

Gegeben seien die folgenden Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie (mit Rechenweg):

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 \\ \frac{1}{2} & -5 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 2 \\ 1 & 9 & -7 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.4 *(5 Punkte)*

Ist K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$, so bezeichnen wir mit $M_{n\times n}(K)$ die Menge aller $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen aus K. Ferner bezeichne $+$ die komponentenweise Addition von Matrizen, d.h.

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij},$$

und $\cdot$ die in der Vorlesung definierte Matrixmultiplikation.

In der Plenumsübung am 19.11 werden Sie sehen, dass $(M_{n\times n}(K), +)$ für jeden Körper K und jedes $n \in \mathbb{N}$ eine abelsche Gruppe bildet. Ferner wird in der Vorlesung gezeigt, dass Assoziativität bezüglich der Matrixmultiplikation gilt.

Beweisen oder widerlegen Sie nun, dass $(M_{n\times n}(K), +, \cdot)$ die folgenden Gesetze für alle Körper K und alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt:

(1) Abgeschlossenheit bzgl. Multiplikation
(2) Existenz eines neutralen Elements bzgl. Multiplikation
(3) Distributivgesetz
(4) Kommutativgesetz bzgl. Multiplikation
(5) Nullteilerfreiheit (d.h. es existieren keine von Null verschiedenen $A, B \in M_{n\times n}(K)$ mit $A \cdot B = 0$).

Was können wir somit über die Struktur von $(M_{n\times n}(K), +, \cdot)$ sagen?